Appendice B
Principi di trigonometria sferica

B.1 La Sfera Celeste

Per determinare la posizione di un astro in cielo in un certo istante si ricorre alla proiezione di questo su un'ideale **Sfera Celeste** di raggio indefinito con origine nel centro della Terra o in qualche altro punto dello spazio (ad es. il baricentro del sistema solare). Inoltre si definisce sulla Sfera Celeste un sistema di coordinate analogo a quello che viene utilizzato per stabilire la posizione geografica di un luogo sulla

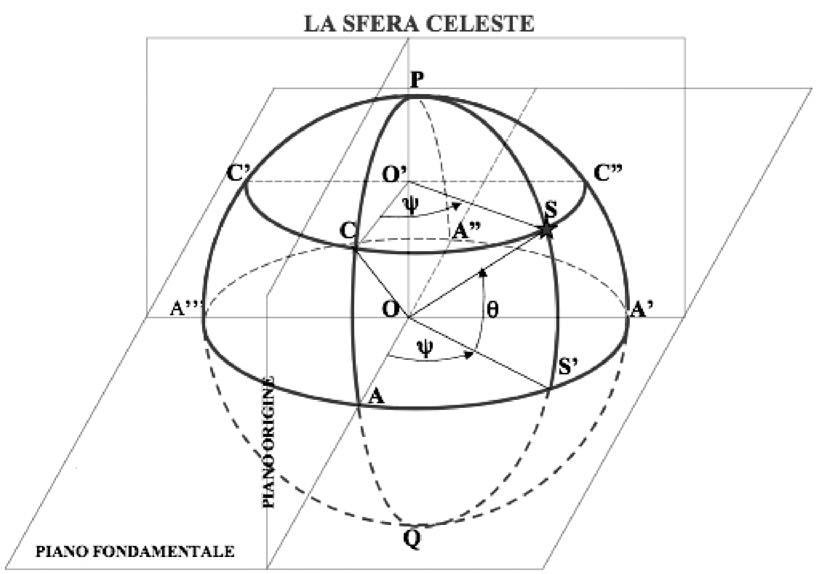

Fig. B.1 La Sfera Celeste

Terra. Con riferimento alla Fig. B.1 consideriamo una sfera di raggio indefinito con origine nel centro della Terra sulla quale vengono proiettati gli astri. Immaginiamo di intersecarla con due piani perpendicolari tra di loro passanti per il centro della sfera detti rispettivamente *Piano Fondamentale* e *Piano Origine*. In tal modo si individuano sulla sfera due cerchi massimi $AA'A''A'''$ e $PCAQ$ che si intersecano in due punti A e A'' di cui uno (il punto A), per convenzione, viene considerato come origine del sistema di coordinate a cui viene riferita la posizione delle stelle.

La prima coordinata ψ viene contata positivamente sul cerchio del Piano Fondamentale, generalmente in gradi, a partire dal punto A fino al punto S' che rappresenta la proiezione della stella S presa sul cerchio massimo passante per il polo P e perpendicolare al Piano Fondamentale, mentre la seconda coordinata θ viene contata positivamente dal punto S' del Piano Fondamentale sul cerchio massimo passante per P fino ad incontrare il cerchio minore parallelo al Piano Fondamentale nel punto S. Si ricorda che qualsiasi piano intersecante la Sfera Celeste e non passante per il suo centro determina sulla sfera un cerchio minore.

A volte risulta conveniente calcolare la distanza angolare tra due punti aventi stessa altezza dal Piano Fondamentale su di un cerchio minore anziché su di un cerchio massimo. Ad esempio per calcolare la distanza angolare CS di Fig. B.1 si noti che questa è legata a ψ, θ (in radianti) e $R = CO = AO$ dalle seguenti relazioni:

$$CS = \psi \times CO' = \psi \times R\cos\theta \ . \tag{B.1}$$

D'altra parte $\psi = AS'/R$ per cui:

$$CS = AS'\cos\theta \ . \tag{B.2}$$

La distanza angolare CS è così calcolata su di un cerchio minore, mentre andrebbe calcolata su di un cerchio massimo. Tuttavia, quando il moto proprio di una stella corrisponde ad uno spostamento angolare inferiore al grado è ragionevole confondere l'arco di cerchio minore con quello massimo in quanto la differenza tra i due ammonta al massimo solo a qualche millesimo di secondo d'arco.

B.2 Trigonometria sferica

Poiché sulla Sfera Celeste si misurano solo distanze angolari di oggetti rispetto ad un sistema di coordinate, lo studio dei triangoli sferici e della trigonometria sferica diventa uno strumento indispensabile per effettuare le trasformazioni da un sistema di coordinate ad un altro, oppure per calcolare le distanze angolari di punti sulla Sfera Celeste partendo dalla conoscenza delle coordinate e/o distanze di altri punti. Sono qui ricavate alcune formule principali della trigonometria sferica.

I triangoli sferici sono i triangoli generati sulla sfera dall'intersezione di 3 piani passanti per il centro della sfera stessa, come schematicamente rappresentato in Fig. B.2. I piani DOE, AOE e DOA determinano sulla superficie della sfera rispettivamente i lati sferici $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$, mentre i rispettivi angoli opposti a

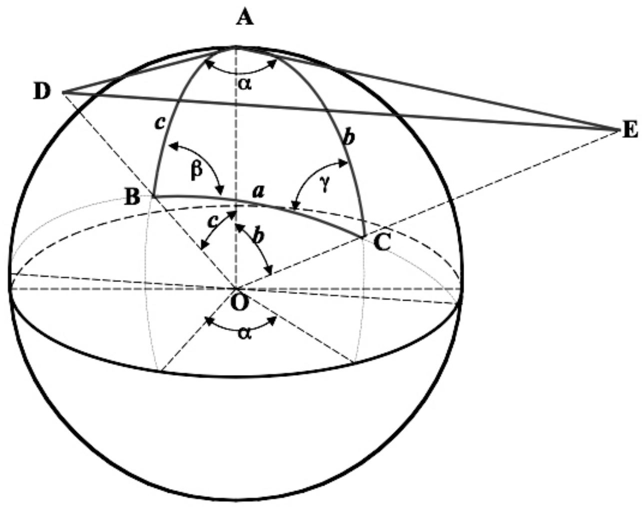

Fig. B.2 Prima formula fondamentale della trigonometria sferica (formula dei coseni)

tali lati sono α, β, γ. Consideriamo il piano tangente alla sfera in A (Fig. B.2) e il triangolo ADE generato su tale piano dal prolungamento dei raggi OA, OB e OC. L'analisi dei triangoli rettangoli piani DOA e AOE indica che, assumendo il raggio della sfera come unitario ($OA = OB = OC = 1$), valgono le seguenti relazioni:

$$AD = OA\tan(c) = \tan(c) \tag{B.3}$$
$$AE = OA\tan(b) = \tan(b) \tag{B.4}$$
$$OD = OA\sec(c) = \sec(c) \tag{B.5}$$
$$OE = OA\sec(b) = \sec(b)\ , \tag{B.6}$$

mentre l'analisi del triangolo piano DAE, tramite il teorema di Carnot, fornisce:

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD\,AE\,\cos\widehat{DAE}\ . \tag{B.7}$$

Sostituendo i valori dati dalle (B.3) e (B.4) e con $\widehat{DAE} = \alpha$ si ha:

$$DE^2 = \tan^2(c) + \tan^2(b) - 2\tan(c)\tan(b)\cos(\alpha)\ . \tag{B.8}$$

Analogamente, con riferimento al triangolo piano DOE, si ottiene:

$$DE^2 = \sec^2(c) + \sec^2(b) - 2\sec(c)\sec(b)\cos(a)\ . \tag{B.9}$$

Eguagliando le due espressioni e ricordando la relazione trigonometrica $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$ si ottiene infine:

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\alpha) \tag{B.10}$$

che è la *Prima Formula Fondamentale della Trigonometria Sferica*, detta anche *Formula dei Coseni*. Con questa formula possibile calcolare un lato di un triangolo sferico conoscendone gli altri due e langolo compreso tra questi.

Ruotando le lettere della relazione (B.10) è possibile generare le formule analoghe per i restanti due lati del triangolo sferico:

$$\cos(b) = \cos(c)\cos(a) + \sin(c)\sin(a)\cos(\beta) \tag{B.11}$$

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(\gamma)\ . \tag{B.12}$$

Dal set di formule (B.10), (B.11) e (B.12) è possibile ricavare gli angoli α, β, γ se sono noti i tre lati a, b, c:

$$\cos\alpha = \frac{\cos(a) - \cos(b)\cos(c)}{\sin(b)\sin(c)} \tag{B.13}$$

$$\cos\beta = \frac{\cos(b) - \cos(c)\cos(a)}{\sin(c)\sin(a)} \tag{B.14}$$

$$\cos\gamma = \frac{\cos(c) - \cos(a)\cos(b)}{\sin(a)\sin(b)}\ . \tag{B.15}$$

Un altro set di formule può essere ricavato partendo dalla formula (B.10) riscritta nella forma:

$$\sin(b)\sin(c)\cos(\alpha) = \cos(a) - \cos(b)\cos(c)\ . \tag{B.16}$$

Usando eguaglianze delle funzioni trigonometriche ed eseguendo una serie di semplici trasformazioni, si ottiene la *Seconda Formula Fondamentale della Trigonometria Sferica*, detta anche *Formula dei Seni*:

$$\frac{\sin(\alpha)}{sin(a)} = \frac{\sin(\beta)}{sin(b)} = \frac{\sin(\gamma)}{sin(c)}\ . \tag{B.17}$$

Questa formula si applica al caso in cui siano dati due lati di un triangolo sferico ed un angolo non compreso tra i lati: ad esempio dati a, b, α si ricava β e così via.

Infine combinando la prima Formula dei Coseni (B.10) con la seconda (B.11) si giunge alla forma:

$$\sin(a)\cos(\beta) = \cos(b)\sin(c) - \sin(b)\cos(c)\cos(\alpha) \tag{B.18}$$

che rappresenta la *Terza Formula Fondamentale della Trigonometria Sferica*. Ruotando le lettere di questa espressione si ha tutto un set di formule che permettono il calcolo di un angolo dati due lati e un angolo oppure il calcolo di un lato dati gli altri due lati e due angoli secondo le seguenti relazioni:

$$\sin(a)\cos(\gamma) = \cos(c)\sin(b) - \sin(c)\cos(b)\cos(\alpha) \tag{B.19}$$

$$\sin(b)\cos(\alpha) = \cos(a)\sin(c) - \sin(a)\cos(c)\cos(\beta) \tag{B.20}$$

$$\sin(b)\cos(\gamma) = \cos(c)\sin(a) - \sin(c)\cos(a)\cos(\beta) \tag{B.21}$$
$$\sin(c)\cos(\alpha) = \cos(a)\sin(b) - \sin(a)\cos(b)\cos(\gamma) \tag{B.22}$$
$$\sin(c)\cos(\beta) = \cos(b)\sin(a) - \sin(b)\cos(a)\cos(\gamma)\ . \tag{B.23}$$

Esiste inoltre un ultimo set di formule di trigonometria sferica che permettono di calcolare i lati del triangolo sferico quando siano noti i tre angoli α, β, γ:

$$\cos(a) = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} \tag{B.24}$$
$$\cos(b) = \frac{\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma} \tag{B.25}$$
$$\cos(c) = \frac{\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\ . \tag{B.26}$$

Queste formule generalmente sono poco usate, in quanto, di un triangolo sferico, difficilmente si conoscono solo i tre angoli.

In determinati problemi di trigonometria sferica si possono dover risolvere triangoli sferici rettangoli in cui cioè un angolo è di 90° (vedi Fig. B.3). In questo caso le formule viste sinora si semplificano nel seguente modo se supponiamo che l'angolo in A sia retto ($\alpha = 90°$). In tal caso la (B.10) diventa:

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) \tag{B.27}$$

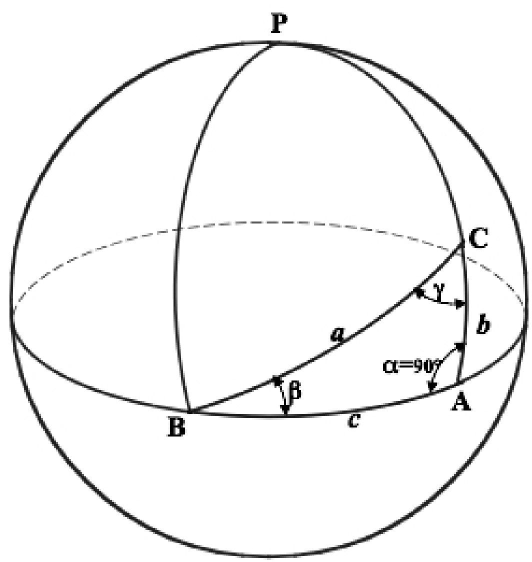

Fig. B.3 Triangolo sferico rettangolo e, per mezzo della (B.17), si ottiene:

$$\sin(a) = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)} \, . \tag{B.28}$$

Questa relazione permette di ricavare l'ipotenusa sferica dati gli altri due lati.

Sempre con combinazioni delle precedenti formule si ottengono altre espressioni per la risoluzione dei triangoli rettangoli sferici:

$$\tan(b) = \tan(a)\cos(\gamma) \tag{B.29}$$

$$\tan(c) = \tan(a)\cos(\beta) \tag{B.30}$$

che permettono di trovare un lato data lipotenusa e un angolo adiacente al lato incognito.

Per una completa trattazione della trigonometri sferica si possono consultare i testi di Barbieri [1] e Zagar [2].

Bibliografia

1. C. Barbieri – *Lezioni di Astronomia*, Zanichelli, 1999
2. F. Zagar – *Astronomia Sferica e Teorica*, Zanichelli, 1984