# Appendice E
# Diffrazione di un'apertura circolare

Il calcolo della risoluzione angolare di un telescopio con apertura circolare fu per la prima volta risolto dall'astronomo inglese George Airy nel 1835. Si consideri un'apertura circolare di raggio $R$ nel piano $xy$. Luce coerente attraversa l'apertura provenendo dalla direzione negativa dell'asse $z$ (Fig. E.1). consideriamo i raggi che lasciano l'apertura parallelamente al piano $xz$ ad un angolo $\theta$ rispetto all'asse $x$ e studiamone l'interferenza su di uno schermo a grande distanza.

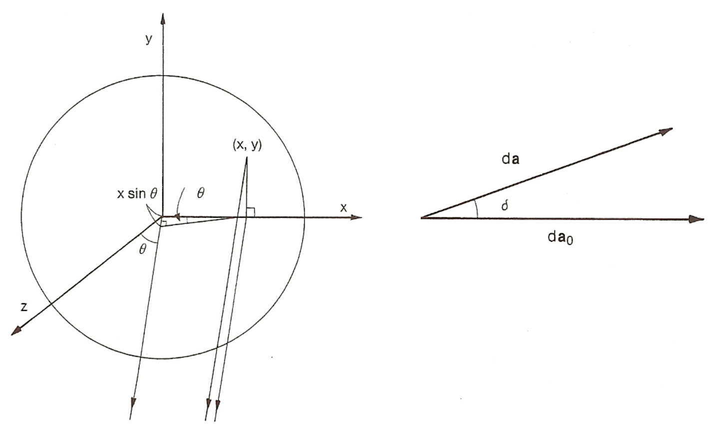


**Fig. E.1** Schema per il calcolo della diffrazione di un'apertura circolare

La differenza di fase tra l'onda che esce dal centro dell'apertura e un punto generico $(x,y)$ dipende dalla differenza di cammino $s = x\sin\theta$, e risulta

$$\delta = \frac{s}{\lambda}2\pi = \frac{2\pi\sin\theta}{\lambda}x = kx \tag{E.1}$$

che dipende solo dalla coordinata $x$. La somma delle ampiezze delle onde provenienti da un elemento dell'apertura è proporzionale all'area $dxdy$. Dando all'ampiezza un significato vettoriale, si chiami $d\mathbf{a}_0 = dxdy\hat{\mathbf{i}}$ l'ampiezza dell'onda proveniente dal centro dell'apertura; conseguentemente l'ampiezza dell'onda proveniente dall'elemento generico in $(x,y)$ sarà, tenendo conto della differenza di fase:

$$d\mathbf{a} = dxdy(\cos\delta\hat{\mathbf{i}} + \sin\delta\hat{\mathbf{j}}) \tag{E.2}$$

per cui, sommando su tutti gli elementi dell'apertura si avrà:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \int_{apertura} d\mathbf{a} = \int_{x=-R}^{x=R} dx \int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{y=\sqrt{R^2-x^2}} dy\,(\cos kx\hat{\mathbf{i}} + \sin kx\hat{\mathbf{j}}) = \\ &= 2\int_{x=-R}^{x=R} dx\,\sqrt{R^2-x^2}(\cos kx\hat{\mathbf{i}} + \sin kx\hat{\mathbf{j}})\end{aligned} \tag{E.3}$$

e poiché la funzione seno è dispari, l'integrale è non nullo solo lungo l'asse $x$:

$$a = \int_0^R dx\,\sqrt{R^2-x^2}\cos kx \tag{E.4}$$

e con cambiamento di variabili

$$a \propto \int_0^1 dt\,\sqrt{1-t^2}\cos pt \quad . \tag{E.5}$$

Il valore dell'intensità della somma delle onde si annulla dove $a = 0$. Il primo zero si ha per $p = 3.8317$, cioè per

$$\sin\theta = \frac{3.8317}{2\pi R}\,\lambda = 1.22\,\frac{\lambda}{D} \ . \tag{E.6}$$