Elementi di cinematica relativistica

1. Sistemi di riferimento

Le quantita' di interesse fisico in un esperimento di fisica delle particelle sono normalmente sezioni d'urto, distribuzioni angolari, polarizzazioni, vite medie e rapporti di decadimento, che sono direttamente confrontabili con la previsioni teoriche. D'altra parte, la misura di queste quantita' e' di solito indiretta, e richiede in ultima analisi la misura diretta di quantita' cinematiche come energie, impulsi, angoli. E' quindi molto importante avere chiaro come tutte queste quantita' cambino, o restino invariate, al cambiare del sistema di riferimento inerziale usato per la misura. Poiche' la fisica delle particelle considera quasi sempre reazioni ad energia molto elevata, e quindi con velocita' vicine a quella della luce nel vuoto, le leggi di trasformazione suddette devono essere conformi ai principi della teoria della relativita' ristretta. Senza voler approfondire in alcuna misura la vasta tematica dei fondamenti della teoria della relativita', ci si propone qui di seguito di dare solo una descrizione sommaria delle grandezze piu' rilevanti e delle loro leggi di trasformazione.

2. Trasformazione di Lorentz

Come e' noto, le leggi relativistiche di trasformazione delle coordinate spaziali e temporale di un evento (in questo contesto, con *evento* si intende, p.es., la emissione di un flash istantaneo di luce da parte di una sorgente luminosa, o il fenomeno analogo del decadimento di una particella instabile) sono diverse da quelle classiche (galileiane). Se i due riferimenti in questione sono in moto relativo con velocita' costante v, diretta p.es. lungo l'asse z, e se la direzione dei tre assi coincide, le leggi di trasformazione delle coordinate dell'evento sono quelle di Lorentz:

$$x' = x$$

$$y' = y$$

$$z' = \gamma(z - \beta ct)$$

$$t' = \gamma(t - \frac{\beta}{c}z)$$

dove

$$\beta = \frac{v}{c}$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

v essendo la velocita' del riferimento S' misurata in S.

Come si vede, le leggi di trasformazione coinvolgono anche la coordinata temporale *t*, il cui valore perde il carattere assoluto della fisica pre-relativistica e viene a dipendere dal sistema di riferimento in cui e' misurato.

La trasformazione di Lorentz delle coordinate ha dunque la caratteristica (matematica, e con profonde conseguenze fisiche) di mescolare coordinate spaziali e temporali. Viene quindi abbastanza naturale paragonare la trasformazione di cui sopra ad una rotazione spaziale attorno ad uno dei 3 assi, dove, analogamente, le altre due coordinate vengono mescolate:

> x' = x $y' = y \cos \alpha + z \sin \alpha$ $z' = -y \sin \alpha + z \cos \alpha$

per una rotazione attorno all'asse x. L'insieme delle trasformazioni di Lorentz viene cosi' ad essere assimilato all'insieme delle rotazioni spaziali. Per queste ultime, come e' noto, esiste una quantita' geometrica *invariante*, la <u>distanza</u> (euclidea) fra due punti

$$r^{2} = (x_{1} - x_{2})^{2} + (y_{1} - y_{2})^{2} + (z_{1} - z_{2})^{2} = (x'_{1} - x'_{2})^{2} + (y'_{1} - y'_{2})^{2} + (z'_{1} - z'_{2})^{2}$$

invariante per rotazioni

E' abbastanza facile vedere come, per le 4 coordinate spazio-temporali, esista un analogo *invariante*, il <u>4-intervallo</u> fra due punti-eventi

$$s^{2} = (ct_{1} - ct_{2})^{2} - (x_{1} - x_{2})^{2} + (y_{1} - y_{2})^{2} + (z_{1} - z_{2})^{2} = (ct_{1} - ct_{2})^{2} - (x_{1} - x_{2})^{2} - (y_{1} - y_{2})^{2} - (z_{1} - z_{2})^{2}$$

invariante per trasformazioni di Lorentz

Si puo' far notare come la proprieta' delle rotazioni di lasciare invariante la distanza fra due punti porti a una classificazione molto generale delle diverse grandezze fisiche, proprio rispetto alle loro proprieta' di trasformazione rispetto a rotazioni:

scalari - invarianti	massa, en.cinetica, en. potenziale, temperatura,
vettori - come le coordinate	posizione, velocita', q. di moto,
tensori - come i m. di inerzia	m. di inerzia, m. di quadrupolo el. ,
Etc	

Analogamente, la proprieta' delle trasformazioni di Lorentz di lasciare invariante il 4intervallo porta ad una classificazione generale delle grandezze fisiche rispetto alle loro proprieta' di trasformazione per trasformazioni di Lorentz. Limitandosi alla fisica classica, si avranno quindi:

4-scalari - invarianti

intervallo, massa a riposo, ...

```
4-vettori - come le 4-coordinate 4-impulso, 4-potenziale e.m.,
4-tensori - come il campo e.m. campo e.m., ...
Etc ......
```

3. Quadrivettori e componenti

Cosi' come ogni insieme di 3 quantita' omogenee che si trasformano - per rotazioni come le coordinate si chiama *vettore*, ogni insieme di 4 quantita' omogenee che si trasformano, rispetto a trasformazioni di Lorentz, come le 4 coordinate si chiama *4vettore*, e puo' venire trattato matematicamente in modo simile a come si trattano i vettori. Un 4-vettore ha quindi 4 componenti, che dal punto di vista della geometria tridimensionale si possono classificare come un 1 vettore + 1 scalare. Si noti come un 4-scalare (ossia, un invariante di Lorentz) sia necessariamente sempre anche un 3scalare (ossia, un invariante per rotazioni), mentre in generale non e' vero il contrario. Convenientemente esse si possono scrivere esplicitamente nel seguente modo:

$$v^{\mu} = \left(v^0, v^1, v^2, v^3\right)$$

Come mostrato sopra, l'*indice di Lorentz* μ corre da 0 a 3, la componente con 0 essendo quella "di tipo tempo".

Il suo "modulo quadro" e'

$$v^{2} = (v^{0})^{2} - (v^{1})^{2} - (v^{2})^{2} - (v^{3})^{2}$$

ed e' indipendente dal sistema di riferimento che usiamo per descriverne le componenti: quindi e' un *invariante* (di Lorentz). Questa definizione del modulo quadro di un 4-vettore e' quella p.es. del testo di *Bjorken e Drell*, ed e' la piu' usata.

La differenza principale rispetto ad un normale vettore a 4 dimensioni e' che il modulo quadrato di un 4-vettore, come si vede, *non* e' definito positivo: il suo segno dipende dalla grandezza relativa delle componenti. Quindi un 4-vettore non e' semplicemente l'estensione 4-dimensionale di un 3-vettore: si dice che lo spazio-tempo non e' un normale spazio *euclideo* (\leftarrow con definizione della *metrica* - ossia, della distanza fra due punti - data dalla somma dei quadrati delle differenze delle coordinate), ma uno spazio *pseudo-euclideo*, (con metrica non definita positiva). Questo, che e' un fatto sperimentale, ha conseguenze molto importanti e che toccano tutti i campi della fisica. Fra le conseguenze meno ovvie, almeno a priori, c'e' il fatto che non c'e' un solo tipo di componenti per i 4-vettori, ma due: quelle *controvarianti*, che si indicano ponendo l'indice di Lorentz in alto, e quelle *covarianti*, che si indicano ponendo l'indice necesita di conseguenze necesita delle controvarianti di segneto di componenti per seguenze necesita due: quelle *controvarianti*, che si indicano ponendo l'indice di Lorentz in alto, e quelle *covarianti*, che si indicano ponendo l'indice di Lorentz in alto, e quelle *covarianti*, che si indicano ponendo l'indice di Lorentz in alto, e quelle *covarianti*, che si indicano ponendo l'indice di Lorentz in alto, e quelle *covarianti*, che si indicano ponendo l'indice di Lorentz in alto, e quelle *covarianti*, che si indicano ponendo l'indice di Lorentz in alto, e quelle *covarianti*, che si indicano ponendo l'indice di Lorentz in alto, e quelle *covarianti*, che si indicano ponendo l'indice di Lorentz in alto, e quelle *covarianti*, che si indicano ponendo l'indice di Lorentz in alto, e quelle *covarianti*, che si indicano ponendo l'indice di Lorentz in alto, e quelle *covarianti*, che si indicano ponendo l'indice di Lorentz in alto, e quelle covarianti delle di lorentz in alto, e di lorentz in alto, e di lorentz in alto delle di lorentz in alto delle di lorentz in alto dell

Questo fatto puo' stupire, perche' siamo abituati, per i 3-vettori, a considerare un solo tipo di componenti, quelle cartesiane ortogonali. Tuttavia, se usassimo p.es. una terna di assi non ortogonali, anche per i vettori ci sarebbero 2 tipi di componenti, come mostrato in figura, per i quali ci sarebbero leggi di trasformazione per rotazioni fra loro un poco diverse; questa sarebbe una conseguenza del cambiamento della metrica, non piu'

euclidea (infatti ci sarebbero dei termini misti nell'espressione della distanza). Per lo spazio-tempo, la presenza del segno meno nella metrica ha conseguenze simili.



Rispetto ad una coppia ortogonale, le componenti contro- e co-varianti sono identiche. Se consideriamo gli assi obliqui (blu), le componenti controvarianti (blu) sono diverse da quelle covarianti (verdi). E' necessario l'uso di entrambi i tipi di componenti se si vuole che il prodotto scalare di 2 vettori sia invariante per rotazioni; alternativamente, occorre ridefinire il prodotto scalare

Alternativamente, e' possibile per i 4-vettori utilizzare un insieme di componenti leggermente diverso, definito da $(v_1 = v_x, v_2 = v_y, v_3 = v_z, v_4 = iv_t)$. Con esse il modulo quadro del 4-vettore si scrive $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2$. In questo caso, la metrica (chiamata di *Minkowski*, o di *Pauli*) rimane formalmente euclidea (pur con una componente immaginaria!), e non c'e' bisogno di due tipi di componenti. Questa metrica e' oggi poco usata.

Le componenti <u>controvarianti</u> si scrivono come $v^{\mu} = (v^0, v^1, v^2, v^3) = (v_t, v_x, v_y, v_z)$, mentre quelle <u>covarianti</u> sono $v_{\mu} = (v_0, v_1, v_2, v_3) = (v_t, -v_x, -v_y, -v_z)$. Il modulo quadro del 4-vettore risulta cosi' dato dal prodotto $v^2 = v^{\mu}v_{\mu} = v_{\mu}v^{\mu}$; cosi' pure, il prodotto interno fra due 4-vettori si scrive $vu = v^{\mu}u_{\mu} = v_{\mu}u^{\mu}$

Come si ottengono le componenti covarianti da quelle controvarianti, e viceversa? Si usa il *tensore metrico* , dato da:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

E' immediato infatti vedere che $v_{\nu} = g_{\mu\nu}v^{\mu}$, $v^{\nu} = g^{\mu\nu}v_{\mu}$

In generale, come si vede, l'analogia con i 3-vettori (o vettori tout court), in coordinate cartesiane e' piuttosto stretta:

3-vetto	ori	4-vettori			
Operazione: <i>rotazione</i> <i>degli assi</i> Metrica: <i>euclidea</i> Tipi di componenti: <i>1</i>	Invariante: <i>distanza fra 2 punti</i> Segno: + <i>Cartesiane</i>	Operazione <i>: trasf. di Lorentz</i> Metrica: <i>pseudo- euclidea</i> Tipi di componenti: <i>2</i>	Invariante: <i>intervallo</i> <i>fra 2 eventi</i> Segno: +,0,- <i>Controvarianti,</i> <i>covarianti</i>		

4. Trasformazione di Lorentz dei 4-vettori

Oltre alle 4-coordinate, ci sono diversi altri 4-vettori di interesse per cio' che riguarda la cinematica delle reazioni. Il piu' importante e' il <u>4-impulso</u> di una particella, definito da

$$p^{\mu} = (E, \mathbf{p}c)$$

dove p e' la quantita' di moto (relativistica).ed E e' l'energia totale (relativistica) della particella. Queste ultime due quantita' sono definite come

$$\mathbf{p} = m\gamma \mathbf{v}$$
$$E = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

dove m e' la <u>massa a riposo</u> della particella. L'invariante associato al 4-impulso e', secondo la definizione generale data sopra:

$$p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4$$

e coincide con l'energia a riposo della particella, associata alla sua massa a riposo. Per ogni particella, quindi, la massa a riposo e' un invariante, una grandezza caratteristica indipendente dal sistema di riferimento. Da ora in poi, tranne quando esplicitamente menzionato, sottintenderemo l'uso di unita' di misura naturali, nelle quali $\hbar = c = 1$. La legge di trasformazione delle componenti del 4-impulso si puo' scrivere, in completa analogia a quella per le coordinate:

$$p_{\perp}' = p_{\perp}$$
$$p_{\parallel}' = \gamma (p_{\parallel} - \beta E)$$
$$E' = \gamma (E - \beta p_{\parallel})$$

mentre la trasformazione inversa si scrive scambiando le componenti con il "'" e quelle senza, e cambiando il segno di β , conformemente all'intuizione:

$$p_{\perp} = p_{\perp}'$$

$$p_{\parallel} = \gamma (p_{\parallel}' + \beta E')$$

$$E = \gamma (E' + \beta p_{\parallel}')$$

La notazione usata mette in evidenza la proprieta' delle componenti trasversali di rimanere invariate nella trasformazione di Lorentz; risulta quindi conveniente scomporre il vettore impulso p in una componente trasversale p_{\perp} , e in una longitudinale p_{\parallel} rispetto alla velocita' relativa.

La proprieta' piu' importante del 4-impulso totale di un sistema isolato e' quella di conservarsi in ogni interazione; questa legge di conservazione, conseguenza, come tutte le altre simili, di una corrispondente proprieta' di invarianza (in questo caso, della invarianza per *traslazione* nello spazio e nel tempo di un sistema isolato), e' particolarmente utile nello studio delle collisioni fra particelle elementari. Quindi:

$$\sum_{i=1}^{N_{particelle}} p_i^{\mu} = \text{costante}$$

Velocita' del centro di massa nel sistema del laboratorio

Nello studio delle collisioni, spesso si devono prendere in considerazione almeno due diversi riferimenti: il *centro di massa* (che dovrebbe in realta' essere chiamato *centro degli impulsi*), nel quale la quantita' di moto totale e' = 0, e il *laboratorio*, nel quale una delle due particelle che si urtano, il bersaglio, ha quantita' di moto nulla. Per molti scopi occorre poter trasformare diverse grandezze fisiche da un riferimento all'altro: per esempio, le sezioni d'urto vengono calcolate teoricamente nel CM, ma vengono misurate sperimentalmente nel LAB. Limitandoci per il momento alla trasformazioni di un 4-impulso, dobbiamo usare la trasformazione di Lorentz, p.es. nella forma indicata sopra. Si pone allora il problema di calcolare la velocita' relativa $v = \beta c$ fra i due sistemi, quantita' che normalmente non e' nota. Sono invece di solito noti l'impulso del proiettile nel laboratorio, e le masse e riposo di proiettile e bersaglio. Per calcolare la velocita' relativa ci si ricorda delle relazioni fra energia, impulso e massa a riposo:

$$\beta = \frac{|\mathbf{p}|}{E}, \gamma = \frac{E}{m}, \beta \gamma = \frac{|\mathbf{p}|}{m}$$

Quel che cerchiamo e' β = velocita' del CM vista dal LAB , o $-\beta$ = velocita' del LAB vista dal CM. Supponiamo che il proiettile si muova lungo l'asse z, e che gli assi dei due riferimenti siano allineati.

Nel LAB, l'impulso totale e' \mathbf{p}_{ρ} (il bersaglio e' fermo), e l'energia totale e' $E_{\rho}+m_b$ (per lo stesso motivo). Quindi il 4-impulso totale e'

$$p = \left(E_p + m_b, \mathbf{p}_p\right)$$

L'insieme delle 2 particelle si puo' quindi considerare come una "particella equivalente", che si muove con velocita' $\beta = \frac{|\mathbf{p}|}{E} = \frac{|\mathbf{p}_p|}{m_b + E_p}$.

Nel CM, questa stessa "particella" ha, per definizione, 4-impulso totale $p^* = (E_p^* + E_b^*, \mathbf{0})$; quindi il sistema delle 2 particelle e' in questo caso equivalente ad una particella ferma, di "massa a riposo" $m_{pb} = E_p^* + E_b^*$.

Allora, la velocita' β e' proprio la velocita' del CM nel laboratorio; esplicitamente essa si scrive, in termini delle quantita' note indicate sopra:

$$\beta = \frac{\left|\mathbf{p}_{p}\right|}{m_{b} + \sqrt{m_{p}^{2} + \left|\mathbf{p}_{p}^{2}\right|}}$$

Questa e' dunque la velocita' cercata, da usare nella trasformazione di Lorentz di un qualsiasi 4-impulso (p.es., di uno dei prodotti della reazione).

Una conseguenza di grande importanza sperimentale della legge di trasformazione di Lorentz del 4-impulso e' la regola con cui si trasformano gli angoli e i moduli degli impulsi fra CM e LAB. Per ragioni di chiarezza, e' conveniente innanzi tutto mostrare come si trasforma la *sfera degli impulsi* fra CM e LAB.

a) Trasformazione della sfera degli impulsi

Consideriamo una particella che ha impulso di modulo p^* e direzione non specificata nel CM. Considerando tutte le possibili direzioni, il vettore p^* riempie allora una superficie sferica di raggio p^* nello spazio 3-dimensionale degli impulsi, come rappresentato (in 2 dimensioni) in figura:



L'equazione della sfera sara':

$$p_{\perp}^{*2} + p_{\parallel}^{*2} = p_x^{*2} + p_y^{*2} + p_z^{*2} = k^2$$

Nel LAB si ha, in base alla trasformazione di Lorentz lungo z:

$$p_{\perp} = p_{\perp}^{*}$$
$$p_{\parallel} = \gamma \left(p_{\parallel}^{*} + \beta E^{*} \right)$$
$$E = \gamma \left(E^{*} + \beta p_{\parallel}^{*} \right)$$

Sostituendo:

$$p_{\parallel}^{*} = \frac{1}{\gamma} p_{\parallel} - \beta E^{*}$$

$$\rightarrow p_{\perp}^{2} + \left(\frac{p_{\parallel}}{\gamma} - \beta E^{*}\right)^{2} = k^{2}$$

$$\rightarrow \frac{p_{\perp}^{2}}{k^{2}} + \frac{\left(p_{\parallel} - \beta \gamma E^{*}\right)^{2}}{\gamma^{2} k^{2}} = 1$$

che e' l'equazione di un ellissoide, il trasformato nel LAB della sfera degli impulsi nel CM (v. figura).



Possiamo quindi dire che nel passare dal CM al LAB la sfera <u>si e' dilatata</u> del fattore γ lungo z, e <u>si e' spostata</u> in z di $\beta \gamma E^*$. A seconda del valore relativo di $\beta \in \beta^*$, la posizione dell'ellissoide (LAB) rispetto alla sfera (CM) varia: in particolare, possono presentarsi le seguenti 3 situazioni: $\beta < \beta^*$ (colore rosso); in questo caso la corrispondenza fra angoli nel CM e nel LAB e ' biunivoca; come si vede, una particella



emessa al'indietro nel CM va all'indietro anche nel LAB, almeno fino a un certo angolo limite. L'ellissoide interseca il piano dei p_{\perp} . Questo caso e' sempre verificato quando la particella considerata ha massa nulla (fotone, neutrino) e si muove quindi con velocita' β =1.

- (ii) $\beta \cdot \beta^*$ (colore blu); in questo caso un dato angolo nel LAB corrisponde a due angoli nel CM, perche' anche le particelle emesse all'indietro nel CM vengono riportate in avanti nel LAB dal Lorentz boost. L'ellissoide non interseca il piano dei p_1
- (iii) $\beta = \beta^*$ (caso limite fra i due precedenti): l'ellissoide e' tangente al piano dei p_{\perp}
- b) Trasformazione degli angoli

Possiamo in modo ovvio definire gli angoli polari dell'impulso generico nel LAB come

$$\cos\theta = \frac{p_{\parallel}}{\sqrt{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}}, \sin\theta = \frac{p_{\perp}}{\sqrt{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}}$$
$$\tan\varphi = \frac{p_y}{p_y}$$

Come si vede subito dalla formula per la trasformazione di Lorentz, l'angolo ϕ non cambia nella trasformazione, mentre θ varia. Le corrispondenti espressioni nel CM sono

(i)

$$\cos\theta^* = \frac{p_{\parallel}^*}{\sqrt{p_{\parallel}^{*2} + p_{\perp}^{*2}}}, \sin\theta = \frac{p_{\perp}^*}{\sqrt{p_{\parallel}^{*2} + p_{\perp}^{*2}}}$$
$$\tan\varphi = \frac{p_y^*}{p_x^*}$$

e quindi, sostituendo:

$$\cos\theta^* = \frac{\gamma(p_{\parallel} - \beta E)}{\sqrt{\gamma(p_{\parallel} - \beta E)^2 + p_{\perp}^2}}, \sin\theta^* = \frac{p_{\perp}}{\sqrt{\gamma(p_{\parallel} - \beta E)^2 + p_{\perp}^2}}$$
$$\tan\varphi^* = \frac{p_y}{p_x} = \tan\varphi$$

Con un po' di algebra si arriva infine a:

$$\tan \theta^* = \frac{p \sin \theta}{\gamma (p \cos \theta - \beta E)} = \frac{\sin \theta}{\gamma (\cos \theta - \beta / \beta_{part})}$$

avendo definito la velocita' della particella nel LAB come $\beta_{part} = \frac{p}{E}$ (da non confondersi con β , la velocita' del CM nel LAB !). Il grafico che segue mostra la relazione (non sempre 1 a 1, come si vede ! Vedi dopo) fra l'angolo polare misurato nel LAB e nel CM, per il caso in cui $\gamma=5$ e per 3 valori diversi del rapporto β/β^* . Si osservi come per $\beta>\beta*$ ci sia un angolo polare massimo nel LAB.



c) Impulso vs. angolo nel LAB

Diventa quindi importante stabilire la relazione fra impulso e angolo nel LAB, sempre immaginando il caso in cui nel CM l'impulso abbia modulo

prefissato e direzione qualsiasi. Partendo dalla solita trasformazione di Lorentz

$$p_{\perp} = p_{\perp}^{*}$$
$$p_{\parallel} = \gamma \left(p_{\parallel}^{*} + \beta E^{*} \right)$$
$$E = \gamma \left(E^{*} + \beta p_{\parallel}^{*} \right)$$

l'equazione per l'energia si puo' scrivere

$$E^* = -\gamma\beta p_{\parallel} + \gamma E$$

$$\rightarrow E^* = -\gamma\beta p \cos\theta + \gamma E$$

$$\rightarrow E^* = -\gamma\beta p \cos\theta + \gamma \sqrt{m^2 + p^2}$$

Isolando il termine con la radice, quadrando e risolvendo per p si trova:

$$p = p^* \frac{\cos\theta \left(\beta \middle/ \beta^* \pm \sqrt{1 + \gamma^2 \left(1 - \left(\beta \middle/ \beta^*\right)^2\right)} \tan^2\theta\right)}{\gamma \left(1 - \beta^2 \cos^2\theta\right)}$$

L'esistenza, in generale, di due soluzioni si puo' facilmente comprendere facendo riferimento all'ellissoide degli impulsi nel LAB rappresentato piu' sopra: a seconda del valore di β/β^* , l'ellissoide risulta tutta a destra, tangente o parzialmente a sinistra dell'asse delle y. Nel primo caso (che si verifica quando $\beta/\beta^* > 1$), ad un angolo nel CM corrispondono due valori di impulso nel LAB; negli altri casi ($\beta/\beta^* \leq 1$) la corrispondenza e' biunivoca.

4. Uso degli invarianti

L'uso degli invarianti nelle applicazioni di cinematica relativistica e' molto esteso, ed e' meglio spiegato da alcuni esempi concreti:

a) Decadimento in 2 corpi di una particella instabile

Consideriamo il caso, piuttosto comune, di una particella "madre" di massa M che decade in 2 particelle "figlie" di masse $m_1 e m_2$. La conservazione del 4-impulso totale puo' essere scritta convenientemente usando le componenti dei 4-vettori nel CM della particella madre:

$$(M, 0, 0, 0) = (E_1, \mathbf{p}_1) + (E_2, \mathbf{p}_2)$$

$$M = E_1 + E_2 = \sqrt{m_1^2 + p_1^2} + \sqrt{m_2^2 + p_2^2}$$

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0 \rightarrow \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \rightarrow |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = p$$

Sviluppando l'algebra si trova per l'impulso delle particelle figlie nel CM della particella madre :

$$p = \frac{1}{2M} \sqrt{\left[M^2 - (m_1 - m_2)^2\right] \left[M^2 - (m_1 + m_2)^2\right]}$$

Si possono adesso calcolare le energie delle particelle:

$$E_{1} = \sqrt{m_{1}^{2} + p^{2}} = \frac{1}{2M} \left(M^{2} + m_{1}^{2} - m_{2}^{2} \right)$$
$$E_{2} = \sqrt{m_{2}^{2} + p^{2}} = \frac{1}{2M} \left(M^{2} + m_{2}^{2} - m_{1}^{2} \right)$$

<u>Osservazioni</u>

1) Per avere p reale, si deve avere $M \ge m_1 + m_2$, coerentemente con le attese intuitive

2) L'impulso delle particelle figlie nel CM della particella madre e' uguale in modulo e opposto in direzione

3) Il modulo e' fissato ad un unico valore dalle masse a riposo delle 3 particelle; quest'ultima e' una caratteristica unica dei decadimenti a 2 corpi

4) Nulla ci dice la cinematica sulla distribuzione angolare del decadimento; essa e' fissata da regole dinamiche, legate alla conservazione del momento angolare e alle caratteristiche dello stato guantistico della particella che decade

5) Come si e' visto prima, nel CM il valore del modulo dell'impulso delle particelle figlie e' fissato, ed e' quindi indipendente dall'angolo di decadimento. La relazione fra impulso e angolo per ognuna delle particelle figlie e' diversa nel LAB; essa puo' essere ottenuta dalla trasformazione di Lorentz di p^* , oppure dalla conservazione del 4impulso (procedimento assai laborioso); si ottiene comunque

$$p_{1} = \frac{\left(M^{2} + m_{1}^{2} - m_{2}^{2}\right)p\cos\theta_{1} \pm 2E\sqrt{M^{2}p^{*2} - m_{1}^{2}p^{2}\sin^{2}\theta_{1}}}{2\left(M^{2} + p^{2}\sin^{2}\theta_{1}\right)}$$

Si osservi come la richiesta che p_1 sia reale implica che ci sia un angolo max. θ_1 nel LAB quando $\frac{Mp^*}{m_1p} < 1$, il cui valore e' dato da sin $\theta_1^{\max} = \frac{Mp^*}{m_1p}$; in questo caso ci sono 2 valori di p_1 per ogni angolo, e quindi anche 2 valori di p_2 . Se $\frac{Mp^*}{m_1p} > 1$, c'e' un solo p_1 per ogni angolo, quello dato dal segno +.

Esempi

1) Decadimento del π^{O} in 2 γ

Il modo di decadimento prevalente per il pione neutro e' $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Nel sistema di quiete (CM) del π^{ρ} avremo allora:

$$M_{\pi^{0}} = E_{\gamma 1} + E_{\gamma 2}$$

$$0 = \mathbf{p}_{\gamma 1} + \mathbf{p}_{\gamma 2}$$

$$\rightarrow \mathbf{p}_{\gamma 1} = -\mathbf{p}_{\gamma 2} \rightarrow |\mathbf{p}_{\gamma 1}| = |\mathbf{p}_{\gamma 2}| \equiv |\mathbf{p}_{\gamma}|$$
massa fotone = $0 \rightarrow E_{\gamma 1} = \sqrt{m_{\gamma}^{2} + |\mathbf{p}_{\gamma}|^{2}} = |\mathbf{p}_{\gamma}|$

$$E_{\gamma 2} = |\mathbf{p}_{\gamma}|$$

$$\rightarrow M_{\pi^{0}} = p_{\gamma} + p_{\gamma} \rightarrow p_{\gamma} = \frac{M_{\pi^{0}}}{2}$$

I fotoni nello stato finale viaggiano back-to-back nel CM, e hanno energia definita e uguale a meta' della massa del π^{ρ} (intuitivo).

Come si presenta la situazione in un altro sistema di riferimento? Supponiamo che il π^{ρ} sia prodotto in una reazione, con impulso $p_{\pi^{\rho}}$ in qualche sistema di riferimento. Come saranno rivelati i 2 γ in quel sistema di riferimento? Per semplicita', prendiamo un riferimento con l'asse z nella direzione di volo del π^{ρ} ; allora potremo trasformare le componenti dell'impulso di un γ :

$$\begin{split} E_{\gamma 1} &= \gamma \left(E_{\gamma 1}^{*} + \beta p_{\|\gamma 1}^{*} \right) \equiv p_{\gamma 1} \\ p_{\|\gamma 1} &= \gamma \left(p_{\|\gamma 1}^{*} + \beta E_{\gamma 1}^{*} \right) \\ p_{\perp \gamma 1} &= p_{\perp \gamma 1}^{*} \\ E_{\gamma 1}^{*} &= \frac{M_{\pi^{0}}}{2} \equiv p_{\gamma 1}^{*} \\ p_{\|\gamma 1}^{*} &= p^{*} \cos \theta_{1}^{*} \\ Casi \ estremi : \\ \cos \theta_{1}^{*} &= -1 \rightarrow p_{\|\gamma 1}^{*} = -p^{*} = -\frac{M_{\pi^{0}}}{2} \rightarrow p_{\|\gamma 1} = \gamma \left(-\frac{M_{\pi^{0}}}{2} + \beta \frac{M_{\pi^{0}}}{2} \right) \\ \cos \theta_{1}^{*} &= +1 \rightarrow p_{\|\gamma 1}^{*} = +p^{*} = +\frac{M_{\pi^{0}}}{2} \rightarrow p_{\|\gamma 1} = \gamma \left(+\frac{M_{\pi^{0}}}{2} + \beta \frac{M_{\pi^{0}}}{2} \right) \\ &\rightarrow p_{\|\gamma 1} = \gamma \frac{M_{\pi^{0}}}{2} (\mp 1 + \beta) \rightarrow p_{\|\gamma 1} = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1}{1+\beta}} \frac{M_{\pi^{0}}}{2} & \text{val. min} \\ +\sqrt{\frac{1}{1-\beta}} \frac{M_{\pi^{0}}}{2} & \text{val.max.} \end{cases} \end{split}$$

Quindi abbiamo per l'energia dei fotoni un valore minimo $\sqrt{\frac{1}{1+\beta}\frac{M_{\pi^0}}{2}}$ e un

valore massimo $\sqrt{rac{1}{1-eta}}rac{M_{\pi^0}}{2}$.

Se ora prendiamo un insieme di molti decadimenti, cosa possiamo dire sulle energie dell'insieme dei fotoni? Sappiamo gia' che nel CM i fotoni sono monocromatici (hanno tutti la stessa energia); nel LAB, invece, c'e' una correlazione fra energia e angolo di decadimento, come ci dice la trasf. di Lorentz. Se consideriamo un gran numero di decadimenti, osserveremo una *distribuzione statistica* (e isotropa) *di angoli di decadimento*, alla quale corrisponde una *distribuzione statistica di energie* per i fotoni. Cerchiamo la distribuzione di queste energie: il decadimento del π^{ρ} e' isotropo nel suo CM: quindi possiamo dire, per la distribuzione angolare dei fotoni, essendo l'angolo azimutale ϕ distribuito uniformemente:

$$\frac{dN}{d\Omega^*} = A \to \frac{dN}{d\left(\cos\theta^*\right)d\varphi^*} = A \to \frac{dN}{d\left(\cos\theta^*\right)} = B$$

(Si osservi che una distribuzione isotropa e' costante in $cos\theta$, e non in θ ...). La relazione fra energia e angolo nel LAB e' data, come visto prima, da:

$$\begin{split} E_{\gamma 1} &\equiv p_{\gamma 1} = \gamma \left(E_{\gamma 1}^* + \beta p_{\parallel \gamma 1}^* \right) = \gamma \left(\frac{M_{\pi^0}}{2} + \beta p^* \cos \theta^* \right) \\ &= \gamma \left(\frac{M_{\pi^0}}{2} + \frac{M_{\pi^0}}{2} \beta \cos \theta^* \right) = \gamma \frac{M_{\pi^0}}{2} \left(1 + \beta \cos \theta^* \right) \\ &\to dE_{\gamma 1} = \beta \gamma \frac{M_{\pi^0}}{2} d \left(\cos \theta^* \right) \\ &\to \frac{dN}{dE_{\gamma 1}} = \frac{dN}{d \left(\cos \theta^* \right)} \frac{2}{\beta \gamma M_{\pi^0}} = \frac{2B}{\beta \gamma M_{\pi^0}} \end{split}$$

Ci aspettiamo quindi una distribuzione statistica uniforme (piatta) fra le energie min. e max. trovate prima

2) Scoperta del π^{ρ}

Un fascio proveniente da un acceleratore viene mandato su un bersaglio; si ipotizza che esista un mesone π^{ρ} che decade in 2 fotoni, e che esso venga prodotto, in avanti, con impulso press' a poco fissato. Dal bersaglio i contatori "vedono" effettivamente un notevole flusso di γ di varie energie. Si osserva poi che ci sono eventi in coincidenza (2 contatori simmetrici rispetto al fascio) contano simultaneamente, con una certa frequenza. Infine, si osserva che avvicinando i contatori l'uno all'all'altro, oltre un certo limite la frequenza di coincidenze va circa a zero. Il π^{ρ} e' stato scoperto! Infatti, nel piano del decadimento (direzioni dei gamma 1 e 2):

$$\begin{split} p_{\parallel\gamma1} &= \gamma \left(p_{\parallel\gamma1}^* + \beta E_{\gamma1}^* \right) \\ p_{\parallel\gamma2} &= \gamma \left(p_{\parallel\gamma2}^* + \beta E_{\gamma2}^* \right) \\ p_{\perp\gamma1} &= p_{\perp\gamma1}^* \\ E_{\gamma1}^* &= E_{\gamma2}^* = \frac{M_{\pi^0}}{2} \equiv p_{\gamma1}^* = p_{\gamma1}^* \\ p_{\parallel\gamma1}^* &= p^* \cos \theta_1^* \\ p_{\parallel\gamma2}^* &= p^* \cos \theta_2^* \\ \cos \theta_1^* &= -\cos \theta_2^* \\ \sin \theta_1^* &= \sin \theta_2^* \\ &\to \tan \theta_1 = \frac{p_{\perp\gamma1}}{p_{\parallel\gamma1}} = \frac{p^* \sin \theta_1^*}{\gamma \left(p^* \cos \theta_1^* + \beta p^* \right)} = \frac{\sin \theta_1^*}{\gamma \left(\cos \theta_1^* + \beta \right)} \\ &\to \tan \theta_2 = \frac{p_{\perp\gamma2}}{p_{\parallel\gamma2}} = \frac{\sin \theta_2^*}{\gamma \left(\cos \theta_2^* + \beta \right)} = \frac{\sin \theta_1^*}{\gamma \left(-\cos \theta_1^* + \beta \right)} \\ &\to \theta_1^* = \theta_2^* = \frac{\pi}{2} \text{ da' l'angolo minimo fra i due} \\ \alpha_{\min} &= 2 \arctan \left(\frac{1}{\beta\gamma} \right) \\ &\beta \gamma = \frac{p_{\pi^0}}{m_{\pi^0}} \to \alpha_{\min} = 2 \arctan \left(\frac{m_{\pi^0}}{p_{\pi^0}} \right) \end{split}$$

Quindi non ci sono coincidenze fra fotoni con angolo di apertura $< \alpha_{min}$, se essi provengono dal decadimento di una particella di massa $m_{\pi 0}$.

3) Riconoscimento del decadimento di π e *K* in emulsioni nucleari

Quando mesoni π^+ e K^+ decadono da fermi in emulsioni nucleari (*stopping decay*), mostrano una traccia a fine range molto simile: come si puo' distinguerli? I modi di decadimento piu' frequenti sono simili:

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$$
$$K^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$$

Calcoliamo l'energia del μ nel CM dei 2 casi:

$$E_{\mu}^{(\pi)} = \sqrt{m_{\mu}^2 + p_{\mu,\pi}^2} = \frac{M_{\pi}^2 + m_{\mu}^2}{2M_{\pi}} \rightarrow E_{\mu}^{(\pi)} = \frac{(0.139)^2 + (0.106)^2}{2*0.139} \approx 0.110 \text{ GeV}$$
$$E_{\mu}^{(K)} = \sqrt{m_{\mu}^2 + p_{\mu,K}^2} = \frac{M_{K}^2 + m_{\mu}^2}{2M_{K}} \rightarrow E_{\mu}^{(K)} = \frac{(0.494)^2 + (0.106)^2}{2*0.494} \approx 0.258 \text{ GeV}$$

Come si vede, nel caso del π l'energia totale del μ e' di poco superiore alla sua massa, quindi il *range* (percorso medio fatto prima di arrestarsi) e' molto corto; nel caso del *K* invece l'energia totale e' > 2 volte la massa, quindi il range e' molto maggiore

4) Fasci di neutrini

La costruzione di fasci di neutrini e' basata fondamentalmente sui decadimenti in 2 corpi di π e K citati in 3). Infatti, questi decadimenti costituiscono la fonte piu' abbondante di neutrini di alta energia praticamente disponibile, vista la produzione copiosa di π e K nelle collisioni fra protoni di alta energia e nuclei.

4-impulso del neutrino

Nel CM della particella madre, il 3 impulso del neutrino e' dato da:

$$|\mathbf{p}|_{\nu}^{2} = \frac{1}{2M_{\pi,K}} \sqrt{M_{\pi,K}^{2} - m_{\mu}^{2}} \sqrt{M_{\pi,K}^{2} + m_{\mu}^{2}} \simeq \frac{56.5}{248.2} \quad \text{MeV}$$

Il decadimento in 2 corpi e' isotropo (sia il π , sia il K hanno spin 0), quindi la distribuzione di energia nel LAB si ottiene da:

$$\frac{dP}{d\left(\cos\theta^{*}\right)} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{dP}{dE} = \frac{dP}{d\left(\cos\theta^{*}\right)} \frac{d\left(\cos\theta^{*}\right)}{dE}$$
$$E = \gamma\left(E^{*} + \beta p^{*}\cos\theta^{*}\right) \rightarrow dE = \gamma\beta p^{*}d\left(\cos\theta^{*}\right) \rightarrow d\left(\cos\theta^{*}\right) = \frac{dE}{\gamma\beta p^{*}}$$
$$\rightarrow \frac{dP}{dE} = \frac{1}{2\gamma\beta p^{*}} \qquad \begin{cases} \gamma(1+\beta)E^{*} & \max\\ \gamma(1-\beta)E^{*} & \min \end{cases}$$

Lo spettro energetico dei neutrini nel LAB e' quindi molto largo, cosicche' in genere l'energia del neutrino, per un dato evento, non e' nota. In certe condizioni sperimentali e' tuttavia possibile ottenere l'energia del neutrino considerando l'angolo di emissione; si consideri, a titolo di esempio semplificato, una situazione come questa:



La relazione fra angolo di decadimento ed energia si trova direttamente con la conservazione del 4-impulso:

$$p_{\pi} = p_{\mu} + p_{\nu} \rightarrow p_{\mu} = p_{\pi} - p_{\nu} \rightarrow (p_{\mu})^{2} = (p_{\pi} - p_{\nu})^{2}$$
$$m_{\mu}^{2} = m_{\pi}^{2} - 2p_{\pi} \cdot p_{\nu} \rightarrow m_{\pi}^{2} - m_{\mu}^{2} = 2(E_{\pi}E_{\nu} - \mathbf{p}_{\pi} \cdot \mathbf{p}_{\nu})$$
$$\frac{m_{\pi}^{2} - m_{\mu}^{2}}{2(E_{\pi} - p_{\pi}\cos\theta_{\nu})} = E_{\nu}$$

Se $E_{\pi} \gg m_{\pi}$

$$E_{
u} pprox rac{m_{\pi}^2 - m_{\mu}^2}{2E_{\pi}\left(1 - \cos heta
ight)} \!=\! rac{m_{\pi}^2 - m_{\mu}^2}{4E_{\pi}\sin^2 heta/2}$$

Per angoli piccoli:

$$E_{
u}pprox rac{m_{\pi}^2-m_{\mu}^2}{E_{\pi} heta^2}$$

Quindi una misura di θ da' l'energia del neutrino

b) Decadimento in 3 corpi; Dalitz plot

Abbiamo visto prima che nel decadimento in 2 corpi il modulo dell'impulso nel CM e' fissato una volta fissate le masse a riposo delle particelle (madre e figlie). Questo non e' piu' vero nel decadimento in >2 corpi, nel quale le particelle figlie hanno un numero maggiore di gradi di liberta'.

Gradi di liberta' in un decadimento o in una reazione

Se consideriamo uno stato finale a n corpi, nel quale tutte le masse delle particelle siano fissate, il numero totale di componenti dell'impulso e' N=3n. Lo stato finale e' il risultato di una reazione o di un decadimento, processi per i quali normalmente e' noto lo stato iniziale (massa a riposo, impulso); tenuto conto delle leggi di conservazione del 4-impulso (4 equazioni di conservazione indipendenti), lo stato finale ha dunque N'=N-4=3n-4 gradi di liberta' (\leftarrow significato: in assenza di altri vincoli, p.es. di tipo dinamico, le particelle dello stato finale si presentano in molte configurazioni cinematiche equivalenti, quindi p.es. con direzioni di volo ed impulsi diversi da un caso all'altro, tutte per altro consistenti con la conservazione del 4-impulso totale). La situazione e' analoga per certi versi a quella di un sistema termodinamico, in cui ci sono di solito molti micro-stati corrispondenti a un dato macro-stato: lo stato finale con 4-impulso totale P puo' realizzarsi in molti modi equivalenti, in ciascuno dei

quali la condizione $\sum_{i=1}^{N_{part}} p_i^{\mu} = P^{\mu}$ e' verificata con un primo membro a composizione differente. Il numero di gradi di liberta' di una reazione o decadimento e' dunque uguale al numero di variabili cinematiche indipendenti per lo stato finale.

<u>Esempio</u>: 2 corpi, n=2 \rightarrow N'=6-4=2 gradi di liberta'; intuitivamente, possono essere visualizzati come gli angoli $\theta \in \phi$ della direzione di volo nel CM

<u>Esempio</u>: 3 corpi, n=3, \rightarrow N'=9-4=5 gradi di liberta'; questo e' meno intuitivo da visualizzare: si possono scegliere, p.es., massa invariante (v.dopo) di 2 delle 3particelle figlie, direzione di volo nel CM della terza (2 angoli), angoli di<u>d</u>ecadimento della coppia nel suo CM.

Nella pratica sperimentale, spesso il numero di questi gradi di liberta' deve essere confrontato con il numero di grandezze cinematiche misurate: la differenza fra i due numeri, +va o –va, e' un indice della qualita' della ricostruzione dell'evento

Si consideri la somma di due 4-impulsi, p.es. p_1 e p_2 , associati a due delle tre particelle dello stato finale:

$$P^{\mu} = p_1^{\mu} + p_2^{\mu}$$

Sara' possibile ovviamente considerare il modulo quadro di P, dato da

$$P^{2} = (E_{1} + E_{2}, \boldsymbol{p}_{1} + \boldsymbol{p}_{2})^{2} = (E_{1} + E_{2})^{2} - (\boldsymbol{p}_{1} + \boldsymbol{p}_{2})^{2} = m_{1}^{2} + m_{2}^{2} + 2E_{1}E_{2} - 2\boldsymbol{p}_{1} \cdot \boldsymbol{p}_{2}$$

Questa quantita', che e' evidentemente un invariante, sarebbe la massa a riposo al quadrato se P fosse il 4-impulso di una particella elementare; se P e' caratteristico, come in questo caso, di un sistema composto, P^2 si chiama massa invariante del sistema stesso, del quale rappresenta una caratteristica appunto invariante, alla stessa stregua della massa a riposo di una particella. Si noti che la massa invariante dipende non solo dalle masse a riposo, ma anche dagli impulsi (in <u>modulo</u> e <u>direzione</u>) delle particelle componenti.

Per un decadimento a 3 corpi, applichiamo la legge di conservazione del 4impulso:

$$P = p_1 + p_2 + p_3$$

Possiamo ora definire alcuni invarianti, il cui significato fisico risulta semplice da cogliere:

$$s = P^{2} = M^{2}$$

$$s_{1} \equiv s_{23} = (P - p_{1})^{2} = (p_{2} + p_{3})^{2}$$

$$s_{2} \equiv s_{13} = (P - p_{2})^{2} = (p_{1} + p_{3})^{2}$$

$$s_{3} \equiv s_{12} = (P - p_{3})^{2} = (p_{1} + p_{2})^{2}$$

s e' banale; s_1 , s_2 e s_3 sono le masse invarianti al quadrato delle 3 coppie di particelle che si possono formare con lo stato finale a 3 corpi; si noti che la coppia interessata e' ogni volta quella che non contiene l'indice *i* di s_i (questo e' il senso della seconda notazione indicata). I 3 invarianti s_1 , s_2 e s_3 non sono indipendenti, visto che vale la relazione:

$$s_1 + s_2 + s_3 = M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$$

Quindi ogni coppia di masse invarianti s_i puo' assumere valori qualsiasi, all'interno di una regione di variabilita' determinata dai valori delle masse a riposo che sono in gioco. Per convincersi di questa affermazione, per altro piuttosto ovvia, si puo' calcolare p.es. s_1 nel CM della particella madre: allora

$$s_1 = M^2 + m_1^2 - 2ME_1$$

Poiche' $E_1 \ge m_1$, si ha

$$s_1 \leq \left(M - m_1\right)^2$$

Ricordando la formula per la massa invariante, si vede anche che

$$s_1 \equiv s_{23} \ge (m_2 + m_3)^2$$

Quindi, ripetendo le considerazioni per s₂ e s₃, si trova:

$$(m_2 + m_3)^2 \le s_1 \le (M - m_1)^2$$

 $(m_1 + m_3)^2 \le s_2 \le (M - m_2)^2$
 $(m_1 + m_2)^2 \le s_3 \le (M - m_3)^2$

La regione definita dalle disuguaglianze trovate non e' tuttavia interamente accessibile allo stato finale; occorre quindi trovare i limiti p.es. di s₂ per s₁ fissato. Questo si puo' fare nel seguente modo: si sceglie il riferimento coincidente con il CM di 2 e 3 (*sistema di Jackson*); indicando con un [^] le variabili cinematiche in questo riferimento si ha:

$$\mathbf{p}_{2}^{^{\prime}} = -\mathbf{p}_{3}^{^{\prime}}$$
$$\mathbf{p}_{1}^{^{\prime}} = \mathbf{P}^{^{\prime}}$$
$$s_{1} = \left(E^{^{\prime}} - E_{1}^{^{\prime}}\right)^{2} = \left(\sqrt{M^{2} + p_{1}^{2}} - \sqrt{m_{1}^{2} + p_{1}^{2}}\right)^{2}$$
$$= \left(E_{2}^{^{\prime}} + E_{3}^{^{\prime}}\right)^{2}$$

da cui si estrae

Ora consideriamo s₂:

$$s_2 = (p_1 + p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 + 2(E_1^{\hat{}}E_3^{\hat{}} - \mathbf{p}_1^{\hat{}}\cdot\mathbf{p}_3^{\hat{}})$$

Poiche' s_2 dipende solo dall'angolo fra 1 e 3 ($p_2^{\uparrow} e p_3^{\uparrow}$ sono uguali e fissi), si avra' per i valori estremi di s_2 :

$$s_{2\pm} = m_1^2 + m_3^2 + 2(E_1^{\hat{}}E_3^{\hat{}} \pm p_1^{\hat{}}p_3^{\hat{}})$$

Esprimendo $E_1^{\wedge} e E_3^{\wedge}$ in termini di s_1 , si ottiene

$$s_{2\pm} = m_1^2 + m_2^2 + \frac{1}{2s_1} \left[\left(s - s_1 - m_1^2 \right) \left(s - m_2^2 + m_1^2 \right) \pm \lambda^{1/2} \left(s_1, s, m_1^2 \right) \lambda^{1/2} \left(s_1, m_2^2, m_3^2 \right) \right]$$

Questa equazione definisce una curva nel piano (s_1, s_2) , che determina i limiti della regione ammessa. Si possono poi anche ricavare i valori massimi degli impulsi delle particelle figlie nel riferimento di quiete della particella madre: riprendendo

$$s_1 = M^2 + m_1^2 - 2ME_1$$

si vede che E_1^{max} , e quindi anche p_1^{max} , corrispondono a $s_1^{\text{min}} \equiv s_{1-}$. Estraendo E_1, p_1 dall'espressione data sopra, si trova:

$$p_1^{\max} = \frac{1}{2M} \sqrt{\left[M^2 - (m_1 + m_2 + m_3)^2\right] \left[M^2 - (m_2 + m_3 - m_1)^2\right]}$$

c) Reazioni a due corpi

Si consideri la collisione fra un proiettile (1), in moto lungo l'asse z, e un bersaglio (2) in quiete nel sistema del LAB, che ha come effetto quello di generare uno stato finale a 2 corpi (3) e (4), che possono o no coincidere con quelli dello stato iniziale. Il 4-impulso totale P di proiettile e bersaglio ha componenti, nei 2 sistemi di riferimento, sugli stati iniziale e finale:

LAB					CM						
	Р	p_1	p_2	p_3	p_4		Р	p_1	p_2	<i>p</i> ₃	p_4
Е	$E_1 + m_2$	E1	m ₂	E₃	E4	E*	E*1+E*2	E*1	E* 2	E*3	E*4
p _×	0	0	0	p _{x3}	p _{x4}	p_**	0	0	0	p' * ×	-p' * ×
р _у	0	0	0	р _{у3}	p _{y4}	ру *	0	0	0	р'* у	-p' * y
pz	p1	p 1	0	p _{z3}	p _{z4}	p _z *	0	p *	-p*	p'*z	-p ^{′*} z

Si noti come il modulo dell'impulso nel CM non sia necessariamente lo stesso per lo stato iniziale e finale, in conseguenza della possibile differenza fra le masse a riposo di (1, 2) e (3, 4)

Costruiamo alcuni invarianti utili:

a) |4-impulso totale $|^2$ = En. totale nel CM al quadrato

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_3)^2 = P^2$$

Relazioni utili:

$$s = (E_1^* + E_2^*)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_1$$

$$s = (E_3^* + E_4^*)^2 = m_3^2 + m_4^2 + 2(E_3E_4 - \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_4)$$

$$E_1 = \frac{1}{2m_2}(s - m_1^2 - m_2^2)$$

$$p_1 = \frac{1}{2m_2}\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)$$

$$p^* = p_1\frac{m_2}{\sqrt{s}}$$

$$E_{1,2}^* = \frac{1}{\sqrt{s}}(m_{1,2}^2 + m_2E_1)$$

L'en. totale nel CM, \sqrt{s} , e' una quantita' importante nel caso di reazioni con produzione di particelle: l'en. totale nel CM <u>minima</u> perche' possa avvenire una data reazione, nella quale sono prodotte n particelle di masse a riposo $m_1, m_2, ..., m_n$, e': $\sqrt{s} \ge \sum_{i=1}^n m_i$ (<u>en. di soglia</u> per la reazione). L'esistenza di una soglia per \sqrt{s} implica come e' ovvio una soglia per p_{LAB}

b) 4-impulso trasferito 2 dal fascio

Se ne possono, come e' ovvio, definire due:

$$t = (p_1 - p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2(E_1 E_3 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3) = m_1^2 + m_3^2 - 2(E_1^* E_3^* - \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{p}^{'*})$$
$$u = (p_1 - p_4)^2 = m_1^2 + m_4^2 - 2(E_1 E_4 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_4) = m_1^2 + m_4^2 - 2(E_1^* E_4^* + \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{p}^{'*})$$

Relazioni utili:

$$\cos \theta_{3} = \frac{1}{|\mathbf{p}_{1}||\mathbf{p}_{3}|} \left[\frac{1}{2} \left(t - m_{1}^{2} - m_{3}^{2} \right) + E_{1} E_{3} \right]$$
$$\cos \theta_{3}^{*} = \frac{1}{|\mathbf{p}^{*}||\mathbf{p}^{*}|} \left[\frac{1}{2} \left(t - m_{1}^{2} - m_{3}^{2} \right) + E_{1}^{*} E_{3}^{*} \right]$$
$$s + t + u = m_{1}^{2} + m_{2}^{2} + m_{3}^{2} + m_{4}^{2}$$

5. Spazio delle fasi

Il fattore di spazio delle fasi compare nell'espressione della sezione d'urto e della probabilita' di decadimento, insieme al flusso incidente e all'elemento di matrice. In generale si ha che fare, per la probabilita' di transizione, con un'espressione del tipo seguente:

$$w \propto \int d^{3}\mathbf{p}_{1} d^{3}\mathbf{p}_{2} \dots d^{3}\mathbf{p}_{n} \delta^{4} \left(P - p_{1} - p_{2} - \dots - p_{n}\right) \frac{1}{2E_{1}} \frac{1}{2E_{2}} \dots \frac{1}{2E_{n}} F_{in \to out}$$

nella quale:

- *i fattori* $\frac{d^3 \mathbf{p}_i}{2E_i}$ sono invarianti
- l'integrale e' fatto su un certo numero di variabili, fra 1 e 3n; le variabili sulle quali non si integra restano come variabili indipendenti, dalle quali dipende w

• l'integrale multiplo e' esteso a tutta la regione accessibile nello spazio degli impulsi, stante la presenza del vincolo rappresentato dalla funzione δ .

Se l'elemento di matrice e' costante (leggi: indipendente dal valore degli impulsi nello stato finale), ovviamente esce dall'integrale; in questo caso la dipendenza funzionale della probabilita' di transizione dagli impulsi nello stato finale e' tutta e sola quella del fattore di spazio delle fasi. Molto spesso l'evidenza di effetti dinamici viene rivelata confrontando le distribuzioni sperimentali con quelle previste in base al solo spazio delle fasi.

Definiamo quindi l'integrale totale sullo spazio delle fasi come

$$R_{2}(E) = \int d^{3}\mathbf{p}_{1}d^{3}\mathbf{p}_{2}\delta^{4}(P - p_{1} - p_{2})\frac{1}{2E_{1}}\frac{1}{2E_{2}}$$

Definito in questo modo, R_2 e' una funzione dell'energia totale dello stato iniziale, E, ed e' una misura del *peso statistico totale* della configurazione dello stato finale. E' abbastanza intuitivo come sia possibile limitare l'integrazione solo ad alcuni dei gradi di liberta' dello stato finale, ottenendo *distribuzioni statistiche* di R_2 rispetto a una o piu' variabili dello stato finale (come momenti, angoli, masse invarianti di alcune delle particelle dello stato finale).

Conviene concretizzare quanto detto a qualche caso specifico, tenendo conto che in molte situazioni pratiche il calcolo analitico e' impossibile e si ricorre a quello numerico

a) Stato finale a 2 corpi

Prima di eseguire le integrazioni, dobbiamo decidere a cosa siamo interessati: sappiamo gia' che uno stato finale a 2 corpi ha 2 gradi di liberta', dei quali uno solo e' in genere fondamentale (per visualizzare la cosa, pensiamo a uno scattering: l'angolo polare nel CM e' l'angolo interessante, mentre quello azimutale attorno alla direzione del fascio e' di solito irrilevante; se abbiamo un decadimento, possiamo scegliere gli angoli polari nel CM della particella madre, arrivando alle stesse conclusioni). Possiamo quindi interessarci alle distribuzioni angolari nel CM, o ad altre distribuzioni statistiche equivalenti, come previste dal puro spazio delle fasi. Come ottenerle? Si tratta in concreto di eseguire le integrazioni di cui sopra su una parte delle variabili di integrazione, con la complicazione del vincolo dato dalla funzione δ . E' utile ricordare una proprieta' importante dell'elemento invariante di spazio delle fasi:

$$\frac{d^3p}{2E} = \int d^4p \vartheta(E) \delta(p^2 - m^2)$$

dove $\theta(E)$ e' la funzione gradino unitario (che spesso viene sottointesa).

Questo si puo' vedere nel seguente modo:

$$\delta[f(x)] = \sum_{zeri \, dif} \frac{\delta(x-x_i)}{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_i}}$$

$$f(x): p^2 - m^2 = E^2 - p^2 - m^2$$

$$zeri: E_{\pm} = \pm \sqrt{p^2 + m^2}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial E}\right|_{E_{\pm}} = 2E$$

$$\delta(p^2 - m^2) = \frac{\delta(E - E_{+}) + \delta(E - E_{-})}{2E}$$

$$\int d^4 p \vartheta(E) \,\delta(p^2 - m^2) = d^3 p \int dE \vartheta(E) \frac{\delta(E - E_{+}) + \delta(E - E_{-})}{2E}$$

$$= \frac{d^3 p}{2E}$$

Allora l'integrale totale sullo spazio delle fasi a 2 corpi e':

$$R_{2}(E) = \int \frac{d^{3} \boldsymbol{p}_{1}}{2E_{1}} \frac{d^{3} \boldsymbol{p}_{2}}{2E_{2}} \delta^{4} (P - p_{1} - p_{2}) = \int \delta^{4} (P - p_{1} - p_{2}) \delta \left[p_{1}^{2} - m_{1}^{2} \right] \delta \left[p_{2}^{2} - m_{2}^{2} \right] d^{4} p_{1} d^{4} p_{2}$$

Eseguiamo prima l'integrazione su p_2 , che e' facile data la presenza della funzione δ :

$$R_{2}(E) = \int \delta^{4} (P - p_{1} - p_{2}) \delta \left[p_{1}^{2} - m_{1}^{2} \right] \delta \left[p_{2}^{2} - m_{2}^{2} \right] d^{4} p_{1} d^{4} p_{2}$$
$$= \int \delta \left[p_{1}^{2} - m_{1}^{2} \right] \delta \left[(P - p_{1})^{2} - m_{2}^{2} \right] d^{4} p_{1}$$

Si noti come l'argomento delle δ entro l'integrale sia un invariante, che quindi si puo' calcolare in ogni riferimento: se siamo in presenza di un decadimento, (cosa che si puo' sempre assumere, considerando il processo di collisione come fatto di due parti, la formazione di uno stato intermedio con 4-impulso (E_{tot} , p_{tot}), e il successivo decadimento di quest'ultimo), possiamo usare il CM della particella madre. ottenendo:

$$\delta \Big[(P - p_1)^2 - m_2^2 \Big] = \delta \Big[(M - E_1^*)^2 - \boldsymbol{p}_1^{*2} - m_2^2 \Big]$$
$$= \delta \Big[(M^2 + E_1^{*2} - 2ME_1^*) - \boldsymbol{p}_1^{*2} - m_2^2 \Big]$$
$$= \delta \Big[M^2 - 2ME_1^* + m_1^2 - m_2^2 \Big]$$

Allora l'integrale si riscrive:

$$R_{2}(E) = \int \delta \left[p_{1}^{2} - m_{1}^{2} \right] \delta \left[(P - p_{1})^{2} - m_{2}^{2} \right] d^{4} p_{1}$$
$$= \int \frac{d^{3} p_{1}^{*}}{2E_{1}^{*}} \delta \left[M^{2} - 2ME_{1}^{*} + m_{1}^{2} - m_{2}^{2} \right]$$
$$= \int \frac{d^{3} p_{1}^{*}}{2E_{1}^{*}} \delta \left[M^{2} - 2ME_{1}^{*} + m_{1}^{2} - m_{2}^{2} \right]$$

Ora si ha che:

$$E^{2} = p^{2} + m^{2} \rightarrow EdE = pdp \rightarrow dp = \frac{E}{p}dE$$
$$d^{3}\mathbf{p} = p^{2}dpd\Omega = p^{2}\frac{E}{p}dEd\Omega = pEdEd\Omega$$

Quindi:

$$R_{2}(E) = \frac{1}{2} \int p_{1}^{*} \delta \left[M^{2} - 2ME_{1}^{*} + m_{1}^{2} - m_{2}^{2} \right] dE_{1}^{*} d\Omega_{1}^{*}$$

Usando la solita proprieta' della δ si ha infine:

$$R_{2}(E) = \frac{P_{1}^{*}}{4M} \int d\Omega_{1}^{*}$$

$$P_{1}^{*} = P_{2}^{*} = \frac{M^{2} + m_{1}^{2} - m_{2}^{2}}{2M} = \frac{\lambda^{1/2} \left(M^{2}, m_{1}^{2}, m_{2}^{2}\right)}{2M}$$

$$\rightarrow R_{2}(E) = \frac{\lambda^{1/2} \left(M^{2}, m_{1}^{2}, m_{2}^{2}\right)}{8M^{2}} \int d\Omega_{1}^{*}$$

i) Un'integrazione sull'angolo solido fornisce il rate totale:

$$R_{2}(E) = \frac{\pi \lambda^{1/2} \left(M^{2}, m_{1}^{2}, m_{2}^{2}\right)}{2M^{2}} = \frac{\pi P^{*}}{2M}$$

essendo P* l'impulso nel CM.

ii) Viceversa, si puo' non integrare sugli angoli, ed ottenere il *rate angolare* nel CM:

$$\frac{dR_2(E)}{d\Omega_1^*} = \frac{\lambda^{1/2} \left(M^2, m_1^2, m_2^2\right)}{8M^2}$$

Il rapporto con il rate totale fornisce la *distribuzione angolare* nel CM:

$$\frac{dw}{d\Omega_1^*} = \frac{1}{4\pi}$$

uniforme e normalizzata a 1, come atteso

b) Stato finale a 3 corpi

Procedendo come nel caso precedente, possiamo scrivere l'espressione per il rate totale:

$$R_{3}(E) = \int \prod_{i=1}^{3} \frac{d^{3} p_{i}}{2E_{i}} \delta^{4} (P - p_{1} - p_{2} - p_{3})$$

Integriamo inizialmente su p_2 , nel sistema del CM:

$$R_{3}(E) = \int \frac{d^{3}\mathbf{p}_{1}d^{3}\mathbf{p}_{3}}{8E_{1}E_{2}E_{3}}\delta(E - E_{1} - E_{2} - E_{3})$$

in cui:

$$\mathbf{p}_{2} = -(\mathbf{p}_{1} + \mathbf{p}_{3}) \rightarrow E_{2}^{2} = |\mathbf{p}_{1} + \mathbf{p}_{3}|^{2} + m_{2}^{2}$$

$$\rightarrow E_{2}^{2} = p_{1}^{2} + p_{3}^{2} + 2p_{1}p_{3}\cos\theta_{13} + m_{2}^{2}$$

Si puo' esplicitare:

$$d^{3}\mathbf{p}_{1}d^{3}\mathbf{p}_{3} = p_{1}^{2}dp_{1}d\Omega_{1}p_{3}^{2}dp_{3}d\Omega_{3}$$
$$= E_{1}p_{1}dE_{1}d\Omega_{1}E_{3}p_{3}d\Omega_{3}$$

in cui gli angoli $\theta_{3,}\phi_{3}$ sono misurati rispetto alla direzione $\theta_{I,}\phi_{L'}$ questo si puo' fare, visto che per misurare gli angoli della particella 3 ci si puo' riferire ad un asse polare qualsiasi (quindi va bene anche la direzione della particella 1).

Ora, osservando che

$$E_{2}^{2} = p_{1}^{2} + p_{3}^{2} + 2p_{1}p_{3}\cos\theta_{13} + m_{2}^{2} \rightarrow \frac{\partial E_{2}}{\partial\cos\theta_{13}} = \frac{p_{1}p_{3}}{E_{2}}$$

possiamo scrivere l'integrale come:

$$R_{3}(E) = \int \frac{E_{1}p_{1}dE_{1}d\Omega_{1}E_{3}p_{3}dE_{3}d(\cos\theta_{13})d\varphi_{3}}{8E_{1}E_{2}E_{3}}\delta(E - E_{1} - E_{2} - E_{3})$$

ed eseguire l'integrazione su $cos\theta_{13}$ (essa si riporta a un'integrazione che elimina la δ , visto che $cos\theta_{13}$ dipende da E_2):

$$R_{3}(E) = \int \frac{E_{1}p_{1}dE_{1}d\Omega_{1}E_{3}p_{3}dE_{3}d\varphi_{3}}{8E_{1}E_{2}E_{3}(p_{1}p_{3}/E_{2})} = \frac{1}{8}\int dE_{1}d\Omega_{1}dE_{3}d\varphi_{3}$$

Questa e' l'espressione del rate totale; le variabili angolari non sono vincolate e si integrano subito; rimane:

$$R_3(E) = \pi \int dE_1 dE_3$$

dove l'integrale e' esteso alla regione cinematicamente permessa nel piano E_{1}, E_{2} (v. prima discussione sul Dalitz plot). Il rate differenziale nelle 2 energie e' dato da

$$\frac{d^2 R_3(E)}{dE_1 dE_2} = \pi$$

espressione che mostra come la popolazione statistica nel Dalitz plot sia uniformemente distribuita, quando, come in questo calcolo, non si consideri l'effetto dell'elemento di matrice. Ogni effetto dinamico si palesa quindi come una alterazione dell'uniformita' della distribuzione. Questo effetto e' mostrato nel grafico sotto riportato, nel quale si vedono dati sperimentali relativi alla reazione

$$\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- n$$

ad un'energia nel CM di circa 3.8 GeV. La figura rappresenta appunto il Dalitz plot della reazione, nella rappresentazione in cui si usano le masse invarianti di 2 coppie di particelle dello stato finale: ogni punto rappresenta un evento. Gli addensamenti e le rarefazioni di punti sperimentali all'interno della regione permessa, che, come abbiamo visto, dovrebbe essere uniformemente popalata in base alla pura cinematica, sono un segno evidente della presenza di forti effetti dinamici; va notato che nella rappresentazione con masse invarianti l'uniformita' e' attesa per le masse al quadrato (v. sotto). I plot 1dimensionali sui lati del Dalitz plot sono le sue proiezioni



Dalitz plot in termini di variabili diverse

E' equivalente rappresentare il diagramma in termini di masse invarianti (al quadrato) di coppie di particelle o in termini di energie. Questo si puo' vedere ricavando la relazione fra energia totale di una particella e massa invariante delle altre due nella cinematica a 3 corpi: il modo piu' semplice di vedere la cosa e' quello di considerare il decadimento (o la reazione) come se avvenisse in 2 passi:

primo decadimento $M \rightarrow m_1 + m_{23}$, con m_{23} la m.invariante di 2 e 3 secondo decadimento $m_{23} \rightarrow m_2 + m_3$

Allora, possiamo esprimere l'energia nel CM di m_1 , m_2 , m_3 con la formula del decadimento in 2 corpi:

$$E_{1}^{*} = \frac{M^{2} + m_{1}^{2} - m_{23}^{2}}{2M}$$
$$E_{2}^{*} = \frac{M^{2} + m_{2}^{2} - m_{13}^{2}}{2M}$$
$$E_{3}^{*} = \frac{M^{2} + m_{3}^{2} - m_{12}^{2}}{2M}$$

Quindi e' equivalente usare le energie nel CM (quantita' per altro non invarianti) o le masse invarianti (al quadrato)

Decadimento in 3 particelle di massa uguale

E' il caso di diversi decadimenti interessanti, fra i quali p.es.

$$K \to 3\pi$$
$$\eta \to 3\pi$$
$$\omega \to 3\pi$$

(il primo e' un decadimento debole, il secondo elettromagnetico, il terzo forte), nei quali si trascura la differenza di massa fra pione neutro e carico. In questo caso c'e' una rappresentazione interessante, nella quale si plottano in un grafico triangolare le 3 energie cinetiche (nel CM) delle particelle dello stato finale. Deve allora valere:

$$T_i = E_i^* - m$$

 $\sum_{i=1}^{3} T_i = M - 3m = Q$ Q-valore del decadimento

Se si misura T_i lungo l'altezza perpendicolare a un lato, ogni evento e' rappresentato da un punto all'interno del triangolo equilatero di altezza Q:



Introducendo coordinate polari rispetto al centro del triangolo $(T_1=T_2=T_3=Q/3)$ si ha per le coordinate del punto generico entro il triangolo:

$$T_1 = \frac{Q}{3} \left(1 + r \cos \phi \right)$$
$$T_2 = \frac{Q}{3} \left(1 + r \cos \left(\phi + \frac{2\pi}{3} \right) \right)$$
$$T_3 = \frac{Q}{3} \left(1 + r \cos \left(\phi - \frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

Si puo' dimostrare che la curva che delimita la regione cinematicamente permessa ha equazione:

$$(1+x)r^{2} + xr^{3}\cos(3\phi) = 1$$
$$x = \frac{2\varepsilon}{(2-\varepsilon)^{2}}, \varepsilon = \frac{Q}{M}$$

La quantita' ϵ definisce completamente la curva; essa vale

$$arepsilon_{K} = 0.17$$

 $arepsilon_{\eta} = 0.23$
 $arepsilon_{\omega} = 0.47$

In generale, se $Q \cong M \to \epsilon \cong 1 \to x \cong 2$; se $Q \ll M \to \epsilon \cong 0 \to x \cong 0$. Nel secondo caso la curva limite e' un cerchio, nel primo ha una forma triangolare arrotondata.

6. Trasformazione di sezioni d'urto e distribuzioni angolari

E' istruttivo rendersi conto delle proprieta' di trasformazione fra sistemi di riferimento di sezioni d'urto e distribuzioni angolari, grandezze di primario interesse sia nei calcoli teorici sia nella pratica sperimentale.

• Sezione d'urto totale

La relazione fondamentale che lega *rate di interazione* e *luminosita'* di un esperimento e':

$$R = L\sigma$$

eventi al secondo
area⁻¹ tempo⁻¹
area

 σ e' la *sezione d'urto totale*. Nella parte di lezioni dedicata allo scattering da potenziale e alle sue estensioni sara' richiamato il significato intuitivo (classico) di sezione d'urto, e quello meno intuitivo legato alla definizione quantistica della stessa quantita'. Quel che si vuole far emergere qui e' il fatto che, qualunque sia il significato di σ , la sua proprieta' di invarianza di Lorentz si deduce interamente dalle proprieta' di trasformazione delle grandezze R e L a cui e' legata. Consideriamo quindi le proprieta' di trasformazione delle grandezze che compaiono nell'equazione:

R ha le dimensioni dell'inverso di un tempo (in unita' naturali ha le dimensioni di un'energia), quindi non e' un invariante, essendo appunto la grandezza tempo la 4^a componente di un 4-vettore; si osservi che il fatto che la misura del rate sia frame-dependent, apparentemente controintuitivo, e' in realta' in accordo con le proprieta' di trasformazione di una frequenza (non invariante a causa della non invarianza degli intervalli di tempo): il prodotto Lo quindi deve avere le stesse proprieta' di trasformazione. L, che ha dimensione energia³, si trasforma come un'energia. Questo e' in accordo con l'osservazione banale che l'*esposizione* (o *sensibilita' statistica,* o *luminosita' integrata*) di un esperimento, ossia l'integrale della luminosita' istantanea su tutto il tempo di esposizione

$$E = \int_{0}^{T} L(t) dt$$

che fornisce il numero di eventi prodotti nell'esperimento per unita' di sezione d'urto, deve evidentemente essere una quantita' invariante per trasformazioni di Lorentz (altrimenti lo stesso esperimento avrebbe sensibilita' statistiche differenti in diversi riferimenti!). Allora L deve trasformarsi come l'inverso di un tempo per compensare il fattore dt, quindi deve trasformarsi come un'energia. Poiche' R e L hanno le stesse proprieta' di trasformazione, σ deve allora essere invariante. Se interpretiamo *ingenuamente* la sezione d'urto totale σ come un'area (proiettata ortogonalmente alla velocita' relativa) associata ad ogni coppia proiettile-bersaglio, tale che quando una coppia sta entro σ interagisce, allora si comprende come la proprieta' di invarianza di σ sia legata alla sua natura *trasversale*, e quindi invariante. L'interpretazione intuitiva cade tuttavia in casi piu' generali, nei quali l'invarianza di σ e' postulata, piuttosto che dimostrata.

Consideriamo piu' in dettaglio la proprieta' di invarianza di Lorentz della sezione d'urto totale: prendiamo in esame una situazione tipica, in cui un fascio di densita' ρ_2 e velocita' β_2 bombarda un bersaglio di densita' ρ_1 . Il numero di particelle diffuse entro l'elemento di angolo solido d Ω , per unita' di tempo e unita' di volume del bersaglio, e':

$$dN = F \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = F d\sigma$$

Il fattore di flusso F ha dimensioni

$$[T^{-1}][L^{-3}][L^{-2}] = [T^{-1}][L^{-5}]$$

e si puo' esprimere come

$$F = \rho_1 \rho_2 \beta_2$$

(Infatti, considerando un volume e un intervallo finiti, si ha:

$$\Delta N = dN \Delta V_1 \Delta t = d\sigma \Delta N_1 \Delta N_2 = d\sigma \rho_1 \Delta V_1 \rho_2 \beta_2 \Delta t$$

$$\rightarrow dN \Delta V_1 \Delta t = d\sigma \rho_1 \Delta V_1 \rho_2 \beta_2 \Delta t \rightarrow dN = d\sigma \rho_1 \rho_2 \beta_2$$

La densita' volumetrica del fascio sara', in termini di quella nel riferimento in cui il fascio stesso e' in quiete:

$$\rho_2 = \rho_2^0 \gamma = \rho_2^0 \gamma \frac{E_2}{m_2}$$
 effetto contrazione di Lorentz delle lunghezze

Se ora guardiamo lo stesso esperimento in un altro riferimento, che si muove rispetto al primo con velocita' β_1 parallela a β_2 : allora in questo riferimento il bersaglio ha velocita' $-\beta_1$. *dN* non varia, perche' e':

$$dN = \frac{\Delta N}{\Delta V \Delta t}$$

e l'elemento di 4-volume e' invariante (la contrazione delle lunghezze e' compensata dalla dilatazione dei tempi). Allora sara':

 $dN = F' d\sigma'$

e il nuovo fattore di flusso sara'

$$F' = \rho_1 \dot{\rho_2} \left(\beta + \beta_2 \right) = \rho_1^0 \rho_2^0 \left(\beta_1 + \beta_2' \right) \gamma_1 \gamma_2'$$

Usando la legge relativistica di composizione delle velocita'

$$\beta_2' = \frac{\beta_2 - \beta_1}{1 - \beta_1 \beta_2}$$

troviamo che F'=F. Quindi F e' invariante, e quindi lo e' anche $d\sigma$.

• Sezione d'urto differenziale

Mentre il concetto di sezione d'urto totale ha un significato indipendente dal processo particolare che si sta considerando (essendo legato alla probabilita' che avvenga fra proiettile e bersaglio un'interazione qualsiasi - definizione piuttosto chiara e apparentemente non ambigua: ma ci sono in realta' sottigliezze anche in essa), quello di sezione d'urto differenziale e' molto piu' articolato e dipendente dal processo considerato. Occorre ricordare che ci sono molte diverse sezioni d'urto differenziali: la definizione originaria, di contributo elementare alla sezione d'urto totale per le collisioni elastiche che producono uno stato finale con particelle diffuse entro un dato elemento di angolo solido, viene via via allargata a includere ogni tipo di collisioni, anche anelastiche e con produzione di nuove particelle. Diventa quindi necessario esprimere la sezione d'urto differenziale in funzione di grandezze anche diverse dall'angolo di diffusione, come p.es. l'impulso o l'energia della particella prodotta, la massa invariante di 2 o piu' particelle dello stato finale etc.

La sezione d'urto differenziale puo' evidentemente venire espressa come funzione dell'angolo di diffusione nel CM e dell'impulso della particella prodotts:

$$\frac{d^{3}\sigma}{d\Omega^{*}d\left|\mathbf{p}^{*}\right|} = f\left(\theta^{*},\varphi^{*},\left|\mathbf{p}^{*}\right|\right)$$

In generale, se si considera il decadimento di una particella instabile in 2 o piu' prodotti finali, e' ovviamente interessante considerare la distribuzione dei prodotti stessi, che risulta una funzione dell'impulso e degli angoli nel CM, analoga alla sezione d'urto differenziale:

$$\frac{d^{3}f}{d\Omega^{*}d\left|\mathbf{p}\right|^{*}} = f\left(\theta^{*},\varphi^{*},\left|\mathbf{p}\right|^{*}\right)$$

Con opportuna normalizzazione a 1, queste quantita' rappresentano la distribuzione statistica (frequenza) degli eventi di decadimento

Se ci chiediamo quale sia la proprieta' di trasformazione di queste distribuzioni statistiche rispetto a trasformazioni di Lorentz, possiamo osservare innanzi tutto che il modulo del 3-impulso risultera' diverso nei due riferimenti; inoltre, immaginando di scegliere l'asse polare coincidente con la direzione della velocita' relativa fra i due riferimenti, si vede subito che l'angolo azimutale ϕ rimane invariato nella trasformazione, mentre l'angolo polare θ cambia. In conclusione, occorre trovare come si trasformano l'elemento di di impulso e quello di angolo solido: si tratta quindi di eseguire una trasformazione di variabili nello spazio degli impulsi

$$p^{*}, \theta^{*}, \varphi^{*} \to p, \theta, \varphi \begin{cases} p = p(p^{*}, \theta^{*}, \varphi^{*}) \\ \theta = \theta(p^{*}, \theta^{*}, \varphi^{*}) \\ \varphi = \varphi(p^{*}, \theta^{*}, \varphi^{*}) \end{cases}$$

ricavandone lo Jacobiano (ridotto a 2 variabili vista l'invarianza dell'angolo azimutale) per trasformare l'elemento di volume nello spazio degli impulsi: operazione non difficile, visto che le variabili scelte sono equivalenti a coordinate sferiche

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial p^*}{\partial p} & \frac{\partial p^*}{\partial (\cos \theta)} \\ \frac{\partial (\cos \theta^*)}{\partial p} & \frac{\partial (\cos \theta^*)}{\partial (\cos \theta)} \end{vmatrix}$$

$$dp^* d\Omega^* = Jdp d\Omega$$

Ricordando la relazione fra impulsi e angoli nel CM e nel LAB, otteniamo facilmente:

$$J = \frac{\partial p^*}{\partial p} \frac{\partial \cos \theta^*}{\partial \cos \theta} - \frac{\partial p^*}{\partial \cos \theta} \frac{\partial \cos \theta^*}{\partial p}$$
$$tg\theta^* = \frac{1}{\gamma} \frac{p \sin \theta}{p \cos \theta - \beta E}$$
$$p^* = \gamma \sqrt{\left(E - p\beta \cos \theta\right)^2 - \frac{m^2}{\gamma^2}}$$
$$\rightarrow J = \frac{p^2 \left(E - p\beta \cos \theta\right)}{\gamma E \left[\left(E - p\beta \cos \theta\right)^2 - \frac{m^2}{\gamma^2}\right]}$$

Quindi la distribuzione statistica si trasforma come:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial p \partial \Omega} = \frac{1}{J} \frac{\partial^3 f}{\partial p^* \partial \Omega^*}$$

Per esempio, una distribuzione isotropa nel CM, nel caso particolare di una particella a massa nulla con momento fissato come per un decadimento in 2 corpi, diventa nel LAB:

$$\frac{\partial^{3} f}{\partial p \partial \Omega} = \frac{1}{J} \frac{\partial^{3} f}{\partial p^{*} \partial \Omega^{*}} = \frac{1}{J} \underbrace{\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\left|\mathbf{p}_{0}^{*}\right|^{2}} \delta\left(\left|\mathbf{p}^{*}\right| - \left|\mathbf{p}_{0}^{*}\right|\right)}{\frac{\partial^{3} f}{\partial p^{*} \partial \Omega^{*}}}$$

Si osservi come la distribuzione nel CM debba essere espressa in forma completa, senza escludere la parte nel modulo di p. Si puo' verificare che la distribuzione cosi' definita e' effettivamente normalizzata a 1: infatti

$$\int_{\text{rutto lo spazio degli impulsi}} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{p_0^{*2}} \delta(p^* - p_0^*) d^3 p$$
$$= \int \frac{1}{4\pi} \frac{1}{p_0^{*2}} \delta(p^* - p_0^*) p^{*2} dp^* d\Omega^*$$
$$= \frac{1}{p_0^{*2}} \int \delta(p^* - p_0^*) p^{*2} dp^* = 1$$

Nel caso particolare considerato abbiamo

$$p^{*} = \gamma \sqrt{\left(E - p\beta\cos\theta\right)^{2} - \frac{m^{2}}{\gamma^{2}}} = \gamma \left(E - p\beta\cos\theta\right)$$
$$\rightarrow \delta \left(p^{*} - p_{0}^{*}\right) = \delta \left[\gamma \left(E - p\beta\cos\theta\right) - p_{0}^{*}\right]$$
$$E = p$$
$$\gamma \left(p - p\beta\cos\theta\right) = p_{0}^{*} \rightarrow p = \frac{p_{0}^{*}}{\gamma \left(1 - \beta\cos\theta\right)}$$
$$\frac{\partial F}{\partial p}\Big|_{p = zero \, di \, F} = \gamma \left(1 - \beta\cos\theta\right)$$
$$\delta \left(p^{*} - p_{0}^{*}\right) = \delta \left[\gamma \left(E - p\beta\cos\theta\right) - p_{0}^{*}\right]$$
$$= \delta \left[p - \frac{p_{0}^{*}}{\gamma \left(1 - \beta\cos\theta\right)}\right] \frac{1}{\gamma \left(1 - \beta\cos\theta\right)}$$
$$\rightarrow J = \frac{p^{2} \left(p - p\beta\cos\theta\right)}{\gamma p \left[\left(p - p\beta\cos\theta\right)^{2} - \frac{m^{2}}{\gamma^{2}}\right]} = \frac{p^{3} \left(1 - \beta\cos\theta\right)}{\gamma p^{3} \left(1 - \beta\cos\theta\right)^{2}}$$
$$\rightarrow J = \frac{1}{\gamma \left(1 - \beta\cos\theta\right)}$$

Quindi la distribuzione completa nel LAB e':

$$\frac{\partial^3 f}{\partial p \partial \Omega} = \frac{1}{J} \frac{\partial^3 f}{\partial p^* \partial \Omega^*} = \frac{1}{4\pi p_0^{*2}} \delta \left[p - \frac{p_0^*}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)} \right]$$
Volendo la distribuzione angolare, integrata su tutti i valori dell'impulso, troviamo:

$$\frac{\partial f}{\partial \Omega} = \int_0^\infty \frac{1}{4\pi p_0^{*2}} \delta \left[p - \frac{p_0^*}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)} \right] p^2 dp = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\gamma^2(1 - \beta \cos \theta)^2}$$
Distribuzioni angolari

$$\int_{0}^{16} \frac{1}{9} \int_{0}^{16} \frac{1}{9}$$

Come si vede, la legge di trasformazione per le distribuzioni statistiche delle componenti dell'impulso, come la sezione d'urto differenziale, risulta in genere relativamente complicata: questo avviene, evidentemente, perche' le componenti stesse non sono invarianti di Lorentz. Si e' quindi portati ad esprimere le distribuzioni stesse in funzioni di quantita' invarianti, ottenendo cosi' sezioni d'urto differenziali, di tutti i tipi, che sono invarianti esse stesse.

Riprendendo il caso degli urti a 2 corpi discussi prima, ricordiamo la definizione delle variabili invarianti che descrivono la collisione $1+2\rightarrow 3+4$

 $s = (p_1 + p_2)^2$ $t = (p_1 - p_3)^2$ $u = (p_1 - p_4)^2$ $s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$ Come si vede, solo 2 delle 3 sono indipendenti: ricordando che in un processo a 2 corpi, fissato il 4-impulso totale, ci sono solo 2 gradi di liberta', dei quali uno non e' normalmente significativo [in quanto definisce solo l'angolo azimutale del piano della collisione], siamo condotti a identificare 2 dei 3 invarianti come necessari e sufficienti a descrivere la collisone. Si considerino p.es. $s \in t$: la prima quantita', s, e' il quadrato dell'energia totale nel CM, ed e' normalmente fissata ed eguale per tutti gli eventi in un dato esperimento; la seconda quantita', t, e' legata all'angolo polare di scattering. Infatti, da:

$$t = (p_1 - p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2(E_1 E_3 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3)$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = m_1^2 + m_4^2 - 2(E_1 E_4 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_4)$$

si ottiene, nel CM:

$$\cos\theta^* = \frac{s(t-u) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{\left[\lambda(s, m_1^2, m_2^2)\lambda(s, m_3^2, m_4^2)\right]^{1/2}}$$

oppure, nel LAB:

$$\cos\theta = \frac{2m_2^2 \left(t - m_1^2 - m_3^2\right) - \left(s - m_1^2 - m_2^2\right) \left(u - m_2^2 - m_3^2\right)}{\left[\lambda \left(s, m_1^2, m_2^2\right) \lambda \left(u, m_2^2, m_3^2\right)\right]^{1/2}}$$

Quindi e' possibile esprimere la sez. d'urto differenziale in termini di una grandezza invariante, come il 4-impulso trasferito

Alla fine della parte dedicata allo scattering viene discusso con qualche dettaglio il fattore di spazio delle fasi invariante

Riferimenti:

Hagedorn, Relativistic Kinematics Landau-Lifshits, Teoria dei campi, Cap II 530.19 LAN