

Elementi di cinematica relativistica

1. Sistemi di riferimento

Le quantità di interesse fisico in un esperimento di fisica delle particelle sono normalmente sezioni d'urto, distribuzioni angolari, polarizzazioni, vite medie e rapporti di decadimento, che sono direttamente confrontabili con le previsioni teoriche. D'altra parte, la misura di queste quantità è di solito indiretta, e richiede in ultima analisi la misura diretta di quantità cinematiche come energie, impulsi, angoli. È quindi molto importante avere chiaro come tutte queste quantità cambino, o restino invariate, al cambiare del sistema di riferimento inerziale usato per la misura. Poiché la fisica delle particelle considera quasi sempre reazioni ad energia molto elevata, e quindi con velocità vicine a quella della luce nel vuoto, le leggi di trasformazione suddette devono essere conformi ai principi della teoria della relatività ristretta. Senza voler approfondire in alcuna misura la vasta tematica dei fondamenti della teoria della relatività, ci si propone qui di seguito di dare solo una descrizione sommaria delle grandezze più rilevanti e delle loro leggi di trasformazione, nonché dei principali usi della cinematica relativistica in fisica delle particelle.

2. Trasformazione di Lorentz

Come è noto, le leggi relativistiche di trasformazione delle coordinate spaziali e temporale di un evento (in questo contesto, con *evento* si intende, p.es., la emissione di un flash istantaneo di luce da parte di una sorgente luminosa, o il fenomeno analogo del decadimento di una particella instabile) sono diverse da quelle classiche (galileiane). Se i due riferimenti in questione sono in moto relativo con velocità costante v , diretta p.es. lungo l'asse z , e se la direzione dei tre assi coincide, le leggi di trasformazione delle coordinate dell'evento sono quelle di Lorentz:

$$\begin{aligned}x' &= x \\y' &= y \\z' &= \gamma(z - \beta ct) \\t' &= \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}z\right)\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{v}{c} \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\end{aligned}$$

loro proprietà di trasformazione per trasformazioni di Lorentz. Limitandosi alla fisica classica, si avranno quindi:

4-scalari	- <i>invarianti</i>	intervallo, massa a riposo, ...
4-vettori	- <i>come le 4-coordinate</i>	4-impulso, 4-potenziale e.m.,
4-tensori	- <i>come il campo e.m.</i>	campo e.m., ...
Etc	

3. Quadrivettori e componenti

Così come ogni insieme di 3 quantità omogenee che si trasformano - per rotazioni - come le coordinate si chiama *vettore*, ogni insieme di 4 quantità omogenee che si trasformano, rispetto a trasformazioni di Lorentz, come le 4 coordinate si chiama *4-vettore*, e può venire trattato matematicamente in modo simile a come si trattano i vettori. Un 4-vettore ha quindi 4 componenti, che dal punto di vista della geometria tridimensionale si possono classificare come un 1 vettore + 1 scalare. Si noti come un 4-scalare (ossia, un invariante di Lorentz) sia necessariamente sempre anche un 3-scalare (ossia, un invariante per rotazioni), mentre in generale non è vero il contrario. Convenientemente esse si possono scrivere esplicitamente nel seguente modo:

$$v^\mu = (v^0, v^1, v^2, v^3)$$

Come mostrato sopra, l' *indice di Lorentz* μ corre da 0 a 3, la componente con 0 essendo quella "di tipo tempo".

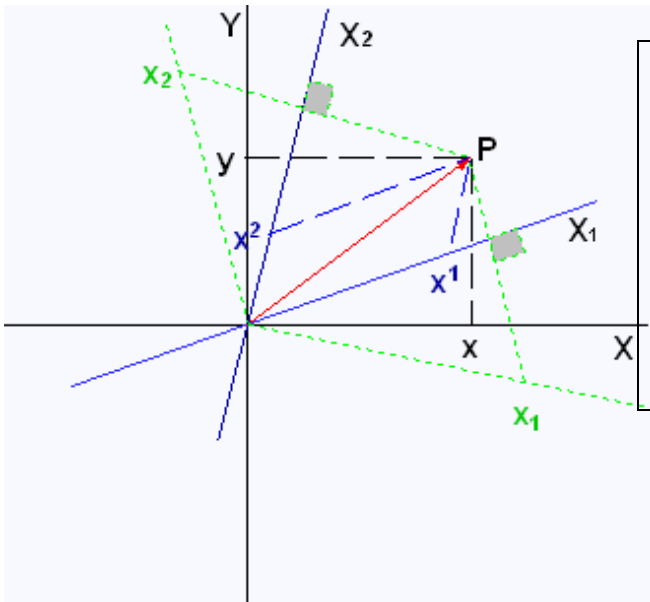
Il suo "modulo quadro" è

$$v^2 = (v^0)^2 - (v^1)^2 - (v^2)^2 - (v^3)^2$$

ed è indipendente dal sistema di riferimento che usiamo per descriverne le componenti: quindi è un *invariante* (di Lorentz). Questa definizione del modulo quadro di un 4-vettore è quella p.es. del testo di *Bjorken e Drell*, ed è la più usata.

La differenza principale rispetto ad un normale vettore a 4 dimensioni è che il modulo quadrato di un 4-vettore, come si vede, *non* è definito positivo: il suo segno dipende dalla grandezza relativa delle componenti. Quindi un 4-vettore non è semplicemente l'estensione 4-dimensionale di un 3-vettore: si dice che lo spazio-tempo non è un normale spazio *euclideo* (← con definizione della *metrica* - ossia, della distanza fra due punti - data dalla somma dei quadrati delle differenze delle coordinate), ma uno spazio *pseudo-euclideo*, (con metrica non definita positiva). Questo, che è un fatto sperimentale, ha conseguenze molto importanti e che toccano tutti i campi della fisica. Fra le conseguenze meno ovvie, almeno a priori, c'è il fatto che non c'è un solo tipo di componenti per i 4-vettori, ma due: quelle *controvarianti*, che si indicano ponendo l'indice di Lorentz in alto, e quelle *covarianti*, che si indicano ponendo l'indice in basso.

Questo fatto puo' stupire, perche' siamo abituati, per i 3-vettori, a considerare un solo tipo di componenti, quelle cartesiane ortogonali. Tuttavia, se usassimo p.es. una terna di assi non ortogonali, anche per i vettori ci sarebbero 2 tipi di componenti, come mostrato in figura, per i quali ci sarebbero leggi di trasformazione per rotazioni fra loro un poco diverse; questa sarebbe una conseguenza del cambiamento della metrica, non piu' euclidea (infatti ci sarebbero dei termini misti nell'espressione della distanza). Per lo spazio-tempo, la presenza del segno meno nella metrica ha conseguenze simili.



Rispetto ad una coppia ortogonale, le componenti contro- e co-varianti sono identiche. Se consideriamo gli assi obliqui (blu), le componenti controvarianti (blu) sono diverse da quelle covarianti (verdi). E' necessario l'uso di entrambi i tipi di componenti se si vuole che il prodotto scalare di 2 vettori sia invariante per rotazioni; alternativamente, occorre ridefinire il prodotto scalare

Alternativamente, e' possibile per i 4-vettori utilizzare un insieme di componenti leggermente diverso, definito da $(v_1 = v_x, v_2 = v_y, v_3 = v_z, v_4 = iv_t)$. Con esse il modulo quadro del 4-vettore si scrive $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2$. In questo caso, la metrica (chiamata di *Minkowski*, o di *Pauli*) rimane formalmente euclidea (pur con una componente immaginaria!), e non c'e' bisogno di due tipi di componenti. Questa metrica e' oggi poco usata.

Le componenti controvarianti si scrivono come $v^\mu = (v^0, v^1, v^2, v^3) = (v_t, v_x, v_y, v_z)$, mentre quelle covarianti sono $v_\mu = (v_0, v_1, v_2, v_3) = (v_t, -v_x, -v_y, -v_z)$. Il modulo quadro del 4-vettore risulta cosi' dato dal prodotto $v^2 = v^\mu v_\mu = v_\mu v^\mu$; cosi' pure, il prodotto interno fra due 4-vettori si scrive $vu = v^\mu u_\mu = v_\mu u^\mu$

Come si ottengono le componenti covarianti da quelle controvarianti, e viceversa? Si usa il *tensor metrico*, dato da:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

E' immediato infatti vedere che $v_\nu = g_{\mu\nu}v^\mu$, $v^\nu = g^{\mu\nu}v_\mu$

In generale, come si vede, l'analogia con i 3-vettori (o vettori tout court), in coordinate cartesiane e' piuttosto stretta:

3-vettori		4-vettori	
Operazione: <i>rotazione degli assi</i>	Invariante: <i>distanza fra 2 punti</i>	Operazione: <i>trasf. di Lorentz</i>	Invariante: <i>intervallo fra 2 eventi</i>
Metrica: <i>euclidea</i>	Segno: <i>+</i>	Metrica: <i>pseudo-euclidea</i>	Segno: <i>+,0,-</i>
Tipi di componenti: <i>1</i>	Cartesiane	Tipi di componenti: <i>2</i>	<i>Controvarianti, covarianti</i>

4. Trasformazione di Lorentz dei 4-vettori

Oltre alle 4-coordinate, ci sono diversi altri 4-vettori di interesse per cio' che riguarda la cinematica delle reazioni. Il piu' importante e' il 4-impulso di una particella, definito da

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}c)$$

dove \mathbf{p} e' la quantita' di moto (relativistica).ed E e' l'energia totale (relativistica) della particella. Queste ultime due quantita' sono definite come

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$$

$$E = m^2c^4 + p^2c^2$$

dove m e' la massa a riposo della particella. L'invariante associato al 4-impulso e', secondo la definizione generale data sopra:

$$p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2c^2 = m^2c^4$$

e coincide con l'energia a riposo della particella, associata alla sua massa a riposo. Per ogni particella, quindi, la massa a riposo e' un invariante, una grandezza caratteristica indipendente dal sistema di riferimento. Da ora in poi, tranne quando esplicitamente menzionato, sottintenderemo l'uso di unita' di misura naturali, nelle quali $\hbar = c = 1$. La legge di trasformazione delle componenti del 4-impulso si puo' scrivere, in completa analogia a quella per le coordinate:

$$\begin{aligned}
 p_{\perp}' &= p_{\perp} \\
 p_{\parallel}' &= \gamma(p_{\parallel} - \beta E) \\
 E' &= \gamma(E - \beta p_{\parallel})
 \end{aligned}$$

mentre la trasformazione inversa si scrive scambiando le componenti con il " ' " e quelle senza, e cambiando il segno di β , conformemente all'intuizione:

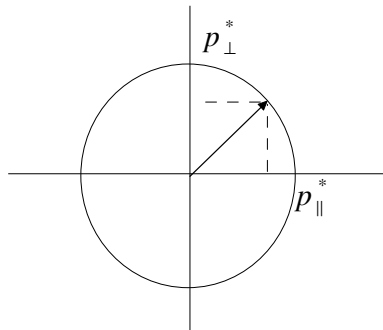
$$\begin{aligned}
 p_{\perp} &= p_{\perp}' \\
 p_{\parallel} &= \gamma(p_{\parallel}' + \beta E') \\
 E &= \gamma(E' + \beta p_{\parallel}')
 \end{aligned}$$

La notazione usata mette in evidenza la proprietà delle componenti trasversali di rimanere invariate nella trasformazione di Lorentz; risulta quindi conveniente scomporre il vettore impulso p in una componente trasversale p_{\perp} , e in una longitudinale p_{\parallel} rispetto alla velocità relativa.

Una conseguenza di grande importanza sperimentale della legge di trasformazione di Lorentz del 4-impulso è la regola con cui si trasformano gli angoli e i moduli degli impulsi fra CM e LAB. Per ragioni di chiarezza, è conveniente innanzi tutto mostrare come si trasforma la *sfera degli impulsi* fra CM e LAB.

a) Trasformazione della sfera degli impulsi

Consideriamo una particella che ha impulso di modulo p^* e direzione non specificata nel CM. Considerando tutte le possibili direzioni, il vettore p^* riempie allora una superficie sferica di raggio p^* nello spazio 3-dimensionale degli impulsi, come rappresentato (in 2 dimensioni) in figura:



L'equazione della sfera è:

$$p_{\perp}^{*2} + p_{\parallel}^{*2} = p_x^{*2} + p_y^{*2} + p_z^{*2} = k^2$$

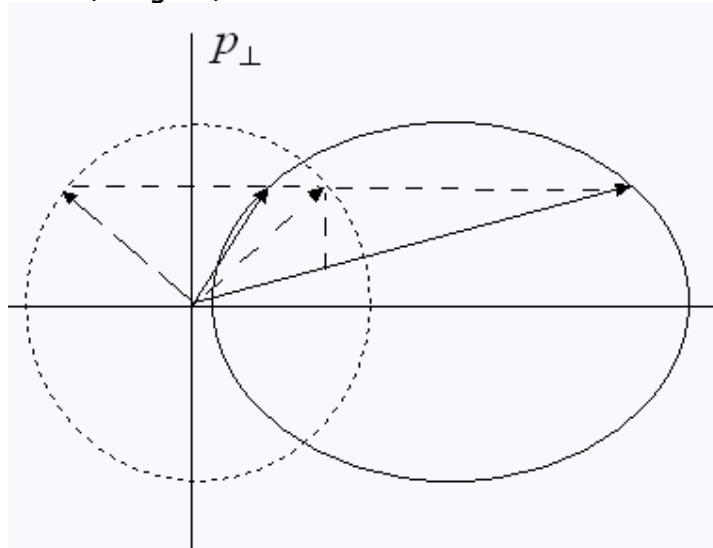
Nel LAB si ha, in base alla trasformazione di Lorentz lungo z :

$$\begin{aligned} p_{\perp} &= p_{\perp}^* \\ p_{\parallel} &= \gamma(p_{\parallel}^* + \beta E^*) \\ E &= \gamma(E^* + \beta p_{\parallel}^*) \end{aligned}$$

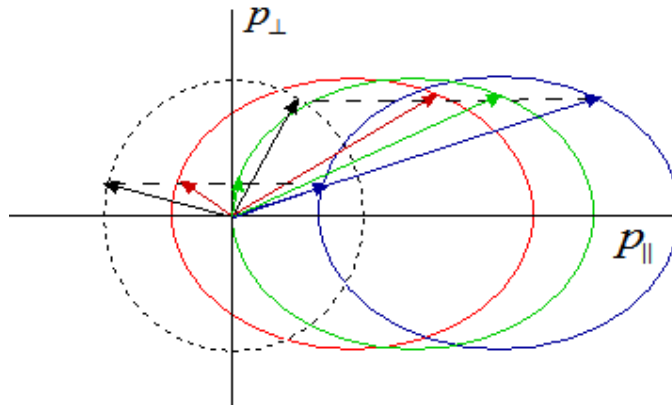
Sostituendo:

$$\begin{aligned} p_{\parallel}^* &= \frac{1}{\gamma} p_{\parallel} - \beta E^* \\ \rightarrow p_{\perp}^2 + \left(\frac{p_{\parallel}}{\gamma} - \beta E^* \right)^2 &= k^2 \\ \rightarrow \frac{p_{\perp}^2}{k^2} + \frac{(p_{\parallel} - \beta \gamma E^*)^2}{\gamma^2 k^2} &= 1 \end{aligned}$$

che e' l'equazione di un ellissoide, il trasformato nel LAB della sfera degli impulsi nel CM (v. figura).



Possiamo quindi dire che nel passare dal CM al LAB la sfera si e' dilatata del fattore γ lungo z , e si e' spostata in z di $\beta \gamma E^*$. A seconda del valore relativo di β e β^* , la posizione dell'ellissoide (LAB) rispetto alla sfera (CM) varia: in particolare, possono presentarsi le seguenti 3 situazioni:



- (i) $\beta < \beta^*$ (colore rosso); in questo caso la corrispondenza fra angoli nel CM e nel LAB e' biunivoca; come si vede, una particella emessa all'indietro nel CM va all'indietro anche nel LAB, almeno fino a un certo angolo limite. L'ellissoide interseca il piano dei p_{\perp} . [Questo caso e' sempre verificato quando la particella considerata ha massa nulla (fotone, neutrino) e si muove quindi con velocita' $\beta=1$].
- (ii) $\beta > \beta^*$ (colore blu); in questo caso un dato angolo nel LAB corrisponde a due angoli nel CM, perche' anche le particelle emesse all'indietro nel CM vengono riportate in avanti nel LAB dal Lorentz boost. L'ellissoide non interseca il piano dei p_{\perp} , ed esiste un angolo massimo nel LAB
- (iii) $\beta = \beta^*$ (caso limite fra i due precedenti): l'ellissoide e' tangente al piano dei p_{\perp} . Nel LAB l'angolo polare max. e' $\pi/2$.

b) Trasformazione degli angoli

Possiamo in modo ovvio definire gli angoli polari dell'impulso generico nel LAB come

$$\cos \theta = \frac{p_{\parallel}}{\sqrt{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}}, \quad \sin \theta = \frac{p_{\perp}}{\sqrt{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{p_y}{p_x}$$

Come si vede subito dalla formula per la trasformazione di Lorentz, l'angolo φ non cambia nella trasformazione, mentre θ varia. Le corrispondenti espressioni nel CM sono

$$\cos \theta^* = \frac{p_{\parallel}^*}{\sqrt{p_{\parallel}^{*2} + p_{\perp}^{*2}}}, \sin \theta^* = \frac{p_{\perp}^*}{\sqrt{p_{\parallel}^{*2} + p_{\perp}^{*2}}}$$

$$\tan \varphi = \frac{p_y^*}{p_x^*}$$

e quindi, sostituendo:

$$\cos \theta^* = \frac{\gamma(p_{\parallel} - \beta E)}{\sqrt{\gamma(p_{\parallel} - \beta E)^2 + p_{\perp}^2}}, \sin \theta^* = \frac{p_{\perp}}{\sqrt{\gamma(p_{\parallel} - \beta E)^2 + p_{\perp}^2}}$$

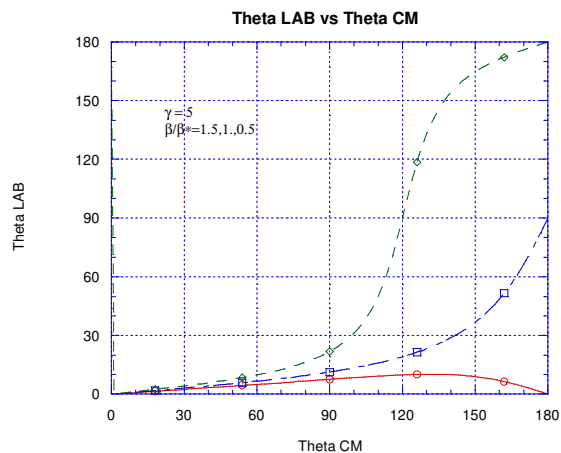
$$\tan \theta^* = \frac{p_y}{p_x} = \tan \varphi$$

Con un po' di algebra si arriva infine a:

$$\tan \theta^* = \frac{p \sin \theta}{\gamma(p \cos \theta - \beta E)} = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta - \beta/\beta_{part})}$$

avendo definito la velocita' della particella nel LAB come $\beta_{part} = \frac{p}{E}$

(da non confondersi con β , la velocita' del CM nel LAB !). Il grafico che segue mostra la relazione (non sempre 1 a 1, come si vede ! Vedi dopo) fra l'angolo polare misurato nel LAB e nel CM, per il caso in cui $\gamma=5$ e per 3 valori diversi del rapporto β/β^* . Si osservi come per $\beta > \beta^*$ ci sia un angolo polare massimo nel LAB.



c) Impulso vs. angolo nel LAB

Diventa quindi importante stabilire la relazione fra impulso e angolo nel LAB, sempre immaginando il caso in cui nel CM l'impulso abbia modulo prefissato e direzione qualsiasi. Partendo dalla solita trasformazione di Lorentz

$$\begin{aligned}p_{\perp} &= p_{\perp}^* \\p_{\parallel} &= \gamma(p_{\parallel}^* + \beta E^*) \\E &= \gamma(E^* + \beta p_{\parallel}^*)\end{aligned}$$

l'equazione per l'energia si puo' scrivere

$$\begin{aligned}E^* &= -\gamma\beta p_{\parallel} + \gamma E \\&\rightarrow E^* = -\gamma\beta p \cos \theta + \gamma E \\&\rightarrow E^* = -\gamma\beta p \cos \theta + \gamma\sqrt{m^2 + p^2}\end{aligned}$$

Isolando il termine con la radice, quadrando e risolvendo per p si trova:

$$p = p^* \frac{\cos \theta \left(\beta / \beta^* \pm \sqrt{1 + \gamma^2 (1 - (\beta / \beta^*)^2)} \right) \tan^2 \theta}{\gamma (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)}$$

L'esistenza, in generale, di due soluzioni si puo' facilmente comprendere facendo riferimento all'ellissoide degli impulsi nel LAB rappresentato piu' sopra: a seconda del valore di β/β^* , l'ellissoide risulta tutta a destra, tangente o parzialmente a sinistra dell'asse delle y . Nel primo caso (che si verifica quando $\beta/\beta^* > 1$), ad un angolo nel CM corrispondono due valori di impulso nel LAB; negli altri casi ($\beta/\beta^* \leq 1$) la corrispondenza e' biunivoca.

5. Uso degli invarianti

La proprieta' piu' importante del 4-impulso totale di un sistema isolato e' quella di conservarsi in ogni interazione; questa legge di conservazione, conseguenza, come tutte le altre simili, di una corrispondente proprieta' di invarianza (in questo caso, della invarianza per *traslazione* nello spazio e nel tempo di un sistema isolato), e' particolarmente utile nello studio delle collisioni fra particelle elementari. Quindi:

$$\sum_{i=1}^{N_{particelle}} p_i^\mu = \text{costante}$$

La norma del 4-impulso totale di un sistema, come quella di ogni altro 4-vettore, e' un invariante di Lorentz.

Per un sistema fisico con diversi gradi di liberta' e' inoltre possibile individuare diverse altre quantita' invarianti, in termini delle quali risulta di solito conveniente esprimere le leggi fisiche cui siamo interessati.

Quindi, la conservazione del 4-impulso totale e l'uso degli invarianti sono procedure molto usate nelle applicazioni di cinematica relativistica, meglio spiegati da alcuni esempi concreti:

a) Decadimento in 2 corpi di una particella instabile

Consideriamo il caso, piuttosto comune, di una particella "madre" di massa M che decade in 2 particelle "figlie" di masse m_1 e m_2 . La conservazione del 4-impulso totale puo' essere scritta convenientemente usando le componenti dei 4-vettori nel CM della particella madre:

$$\begin{aligned} (M, 0, 0, 0) &= (E_1, \mathbf{p}_1) + (E_2, \mathbf{p}_2) \\ M &= E_1 + E_2 = \sqrt{m_1^2 + p^2} + \sqrt{m_2^2 + p^2} \\ \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 &= 0 \rightarrow \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \rightarrow |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = p \end{aligned}$$

Sviluppando l'algebra si trova per l'impulso delle particelle figlie nel CM della particella madre :

$$p = \frac{1}{2M} \sqrt{[M^2 - (m_1 - m_2)^2][M^2 - (m_1 + m_2)^2]}$$

Si possono adesso calcolare le energie delle particelle:

$$\begin{aligned} E_1 &= \sqrt{m_1^2 + p^2} = \frac{1}{2M} (M^2 + m_1^2 - m_2^2) \\ E_2 &= \sqrt{m_2^2 + p^2} = \frac{1}{2M} (M^2 + m_2^2 - m_1^2) \end{aligned}$$

Osservazioni

- 1) Per avere p reale, si deve avere $M \geq m_1 + m_2$, coerentemente con le attese intuitive

2) L'impulso delle particelle figlie nel CM della particella madre e' uguale in modulo e opposto in direzione

3) Il modulo e' fissato ad un unico valore dalle masse a riposo delle 3 particelle; quest'ultima e' una caratteristica unica dei decadimenti a 2 corpi

4) Nulla ci dice la cinematica sulla distribuzione angolare del decadimento; essa e' fissata da regole dinamiche, legate alla conservazione del momento angolare e alle caratteristiche dello stato quantistico della particella che decade

5) Come si e' visto prima, nel CM il valore del modulo dell'impulso delle particelle figlie e' fissato, ed e' quindi indipendente dall'angolo di decadimento. La relazione fra impulso e angolo per ognuna delle particelle figlie e' diversa nel LAB; essa puo' essere ottenuta dalla trasformazione di Lorentz di p^* , oppure dalla conservazione del 4-impulso (procedimento assai laborioso); si ottiene comunque

$$p_1 = \frac{(M^2 + m_1^2 - m_2^2) p \cos \theta_1 \pm 2E \sqrt{M^2 p^{*2} - m_1^2 p^2 \sin^2 \theta_1}}{2(M^2 + p^2 \sin^2 \theta_1)}$$

relazione che realizza per questo caso particolare l'espressione generale trovata prima fra impulso e angolo nel LAB. Anche in questo caso particolare, si osservi come la richiesta che p_1 sia reale implica che ci sia un angolo max. θ_1 nel LAB quando $\frac{Mp^*}{m_1 p} < 1$,

il cui valore e' dato da $\sin \theta_1^{\max} = \frac{Mp^*}{m_1 p}$; in questo caso ci sono 2

valori di p_1 per ogni angolo, e quindi anche 2 valori di p_2 . Se $\frac{Mp^*}{m_1 p} > 1$, c'e' un solo p_1 per ogni angolo, quello dato dal segno +.

Esempi

1) Decadimento del π^0 in 2 γ

Il modo di decadimento prevalente per il pione neutro e' $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Nel sistema di quiete (CM) del π^0 avremo allora:

$$\begin{aligned}
M_{\pi^0} &= E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2} \\
0 &= \mathbf{p}_{\gamma_1} + \mathbf{p}_{\gamma_2} \\
\rightarrow \mathbf{p}_{\gamma_1} &= -\mathbf{p}_{\gamma_2} \rightarrow |\mathbf{p}_{\gamma_1}| = |\mathbf{p}_{\gamma_2}| \equiv |\mathbf{p}_\gamma| \\
\left. \begin{aligned}
\text{massa fotone} = 0 &\rightarrow E_{\gamma_1} = \sqrt{m_\gamma^2 + |\mathbf{p}_\gamma|^2} = |\mathbf{p}_\gamma| \\
&E_{\gamma_2} = |\mathbf{p}_\gamma|
\end{aligned} \right\} \\
\rightarrow M_{\pi^0} &= p_\gamma + p_\gamma \rightarrow p_\gamma = \frac{M_{\pi^0}}{2}
\end{aligned}$$

I fotoni nello stato finale viaggiano back-to-back nel CM, e hanno energia definita e uguale a metà della massa del π^0 (intuitivo).
Come si presenta la situazione in un altro sistema di riferimento?
Supponiamo che il π^0 sia prodotto in una reazione, con impulso p_{π^0} in qualche sistema di riferimento. Come saranno rivelati i 2 γ in quel sistema di riferimento? Per semplicità, prendiamo un riferimento con l'asse z nella direzione di volo del π^0 ; allora potremo trasformare le componenti dell'impulso di un γ :

$$\begin{aligned}
E_{\gamma_1} &= \gamma(E_{\gamma_1}^* + \beta p_{\parallel\gamma_1}^*) \equiv p_{\gamma_1} \\
p_{\parallel\gamma_1} &= \gamma(p_{\parallel\gamma_1}^* + \beta E_{\gamma_1}^*) \\
p_{\perp\gamma_1} &= p_{\perp\gamma_1}^* \\
E_{\gamma_1}^* &= \frac{M_{\pi^0}}{2} \equiv p_{\gamma_1}^* \\
p_{\parallel\gamma_1}^* &= p_{\gamma_1}^* \cos\theta_1^*
\end{aligned}$$

Casi estremi:

$$\begin{aligned}
\cos\theta_1^* = -1 &\rightarrow p_{\parallel\gamma_1}^* = -p_{\gamma_1}^* = -\frac{M_{\pi^0}}{2} \rightarrow p_{\parallel\gamma_1} = \gamma\left(-\frac{M_{\pi^0}}{2} + \beta\frac{M_{\pi^0}}{2}\right) \\
\cos\theta_1^* = +1 &\rightarrow p_{\parallel\gamma_1}^* = +p_{\gamma_1}^* = +\frac{M_{\pi^0}}{2} \rightarrow p_{\parallel\gamma_1} = \gamma\left(+\frac{M_{\pi^0}}{2} + \beta\frac{M_{\pi^0}}{2}\right) \\
\rightarrow p_{\parallel\gamma_1} &= \gamma\frac{M_{\pi^0}}{2}(\mp 1 + \beta) \rightarrow p_{\parallel\gamma_1} = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \frac{M_{\pi^0}}{2} & \text{val. min} \\ +\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \frac{M_{\pi^0}}{2} & \text{val. max.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo per l'energia dei fotoni un valore minimo $\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \frac{M_{\pi^0}}{2}$ e un valore massimo $\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \frac{M_{\pi^0}}{2}$.

Sappiamo già che nel CM i fotoni sono monocromatici (ossia, hanno tutti la stessa energia); nel LAB, invece, come vediamo c'è una

correlazione fra energia e angolo di decadimento, come ci dice la trasf. di Lorentz.

Se consideriamo un gran numero di decadimenti, osserveremo una *distribuzione statistica di angoli di decadimento*, alla quale corrisponde una *distribuzione statistica di energie* per i fotoni: la forma di queste distribuzioni e' diversa nel CM e nel LAB. Cerchiamo la distribuzione di queste energie: il decadimento del π^0 e' isotropo nel suo CM: quindi possiamo dire, per la distribuzione angolare dei fotoni, essendo l'angolo azimutale ϕ distribuito uniformemente:

$$\frac{dN}{d\Omega^*} = A \rightarrow \frac{dN}{d(\cos\theta^*)d\varphi^*} = A \rightarrow \frac{dN}{d(\cos\theta^*)} = B$$

(Si osservi che una distribuzione isotropa e' costante in $\cos\theta$, e non in θ ...). La relazione fra energia e angolo nel LAB e' data, come visto prima, da:

$$\begin{aligned} E_{\gamma 1} \equiv p_{\gamma 1} &= \gamma(E_{\gamma 1}^* + \beta p_{\parallel \gamma 1}^*) = \gamma \left(\frac{M_{\pi^0}}{2} + \beta p^* \cos\theta^* \right) \\ &= \gamma \left(\frac{M_{\pi^0}}{2} + \frac{M_{\pi^0}}{2} \beta \cos\theta^* \right) = \gamma \frac{M_{\pi^0}}{2} (1 + \beta \cos\theta^*) \\ \rightarrow dE_{\gamma 1} &= \beta \gamma \frac{M_{\pi^0}}{2} d(\cos\theta^*) \\ \rightarrow \frac{dN}{dE_{\gamma 1}} &= \frac{dN}{d(\cos\theta^*)} \frac{2}{\beta \gamma M_{\pi^0}} = \frac{2B}{\beta \gamma M_{\pi^0}} \end{aligned}$$

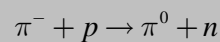
Ci aspettiamo quindi una distribuzione statistica uniforme (piatta) fra le energie min. e max. trovate prima.

La distribuzione angolare nel LAB verra' ricavata piu' avanti.

2) Scoperta del π^0

Un fascio proveniente da un acceleratore viene mandato su un bersaglio; si ipotizza che esista un mesone π^0 che decade in 2 fotoni, e che esso venga prodotto, in avanti, con impulso press' a poco fissato.

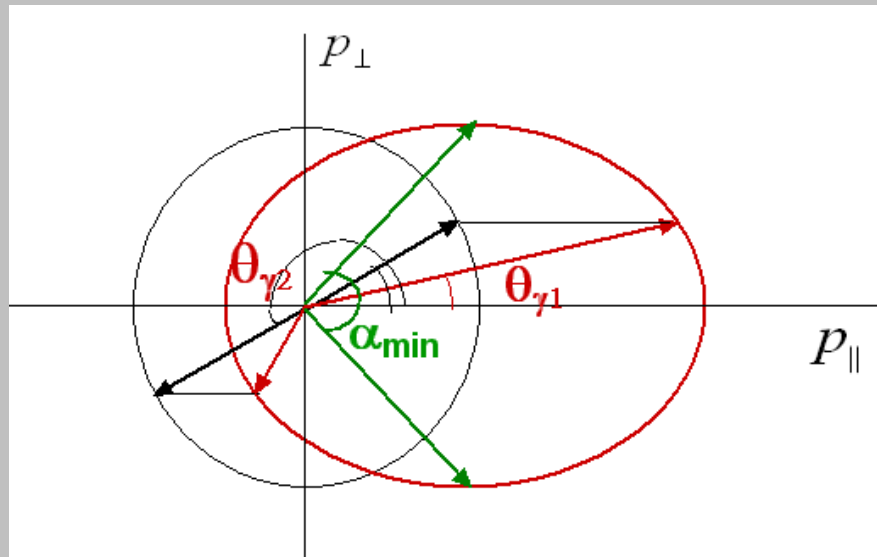
[Questa ipotesi risulta vera nel caso, dominante a energie non troppo elevate, in cui il π^0 venga prodotto nella reazione di "scambio carica"]



Essendo questa una reazione a due corpi, il pione prodotto a angolo = 0 ha impulso fissato, che, se si trascurano le differenze di massa fra p e n , e π e π^0 , e' uguale a quello del π incidente].

Dal bersaglio i contatori "vedono" effettivamente un notevole flusso di γ di varie energie.

Si osserva poi che ci sono eventi in coincidenza (2 contatori, simmetrici rispetto al fascio, contano simultaneamente con una certa frequenza). Infine, si osserva che avvicinando i contatori l'uno all'altro, oltre un certo limite la frequenza di coincidenze va circa a zero. Il π^0 e' stato scoperto! Infatti, nel piano del decadimento del pione neutro (direzioni dei gamma 1 e 2):



$$p_{\parallel\gamma 1} = \gamma(p_{\parallel\gamma 1}^* + \beta E_{\gamma 1}^*)$$

$$p_{\parallel\gamma 2} = \gamma(p_{\parallel\gamma 2}^* + \beta E_{\gamma 2}^*)$$

$$p_{\perp\gamma 1} = p_{\perp\gamma 1}^*$$

$$E_{\gamma 1}^* = E_{\gamma 2}^* = \frac{M_{\pi^0}}{2} \equiv p_{\gamma 1}^* = p_{\gamma 2}^*$$

$$p_{\parallel\gamma 1}^* = p^* \cos \theta_1^*$$

$$p_{\parallel\gamma 2}^* = p^* \cos \theta_2^*$$

$$\cos \theta_1^* = -\cos \theta_2^*$$

$$\sin \theta_1^* = \sin \theta_2^*$$

$$\rightarrow \tan \theta_1 = \frac{p_{\perp\gamma 1}}{p_{\parallel\gamma 1}} = \frac{p^* \sin \theta_1^*}{\gamma(p^* \cos \theta_1^* + \beta p^*)} = \frac{\sin \theta_1^*}{\gamma(\cos \theta_1^* + \beta)}$$

$$\rightarrow \tan \theta_2 = \frac{p_{\perp\gamma 2}}{p_{\parallel\gamma 2}} = \frac{\sin \theta_2^*}{\gamma(\cos \theta_2^* + \beta)} = \frac{\sin \theta_1^*}{\gamma(-\cos \theta_1^* + \beta)}$$

$$\rightarrow \theta_1^* = \theta_2^* = \frac{\pi}{2} \text{ da' l'angolo minimo fra i due}$$

$$\alpha_{\min} = 2 \arctan\left(\frac{1}{\beta\gamma}\right)$$

$$\beta\gamma = \frac{p_{\pi^0}}{m_{\pi^0}} \rightarrow \alpha_{\min} = 2 \arctan\left(\frac{m_{\pi^0}}{p_{\pi^0}}\right)$$

Quindi non ci sono coincidenze fra fotoni con angolo di apertura $< \alpha_{\min}$

se essi provengono dal decadimento di una particella di massa m_{π^0} .

3) Riconoscimento del decadimento di π e K in emulsioni nucleari

Quando mesoni π^+ e K^+ decadono da fermi in emulsioni nucleari (*stopping decay*), mostrano una traccia a fine range molto simile: come si puo' distinguerli? I modi di decadimento piu' frequenti sono simili:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_{\mu}$$

$$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_{\mu}$$

Calcoliamo l'energia del μ nel CM dei 2 casi:

$$E_{\mu}^{(\pi)} = \sqrt{m_{\mu}^2 + p_{\mu,\pi}^2} = \frac{M_{\pi}^2 + m_{\mu}^2}{2M_{\pi}} \rightarrow E_{\mu}^{(\pi)} = \frac{(0.139)^2 + (0.106)^2}{2 \cdot 0.139} \approx 0.110 \text{ GeV}$$

$$E_{\mu}^{(K)} = \sqrt{m_{\mu}^2 + p_{\mu,K}^2} = \frac{M_K^2 + m_{\mu}^2}{2M_K} \rightarrow E_{\mu}^{(K)} = \frac{(0.494)^2 + (0.106)^2}{2 \cdot 0.494} \approx 0.258 \text{ GeV}$$

Come si vede, nel caso del π l'energia totale del μ e' di poco superiore alla sua massa, quindi il *range* (percorso medio fatto prima di arrestarsi) e' molto corto; nel caso del K invece l'energia totale e' > 2 volte la massa, quindi il range e' molto maggiore

4) Fasci di neutrini

La costruzione di fasci di neutrini e' basata fondamentalmente sui decadimenti in 2 corpi di π e K citati in 3). Infatti, questi decadimenti costituiscono la fonte piu' abbondante di neutrini di alta energia praticamente disponibile, vista la produzione copiosa di π e K nelle collisioni fra protoni di alta energia e nuclei.

4-impulso del neutrino

Nel CM della particella madre, il 3 impulso del neutrino e' dato da:

$$|\mathbf{p}_{\nu}^2 = \frac{1}{2M_{\pi,K}} \sqrt{M_{\pi,K}^2 - m_{\mu}^2} \sqrt{M_{\pi,K}^2 + m_{\mu}^2} \simeq \frac{56.5}{248.2} \text{ MeV}$$

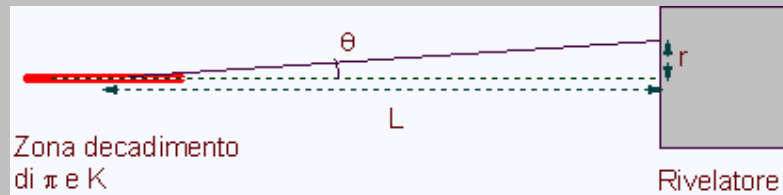
Il decadimento in 2 corpi e' isotropo (sia il π , sia il K hanno spin 0), quindi la distribuzione di energia nel LAB si ottiene da:

$$\frac{dP}{d(\cos \theta^*)} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{dP}{dE} = \frac{dP}{d(\cos \theta^*)} \frac{d(\cos \theta^*)}{dE}$$

$$E = \gamma(E^* + \beta p^* \cos \theta^*) \rightarrow dE = \gamma \beta p^* d(\cos \theta^*) \rightarrow d(\cos \theta^*) = \frac{dE}{\gamma \beta p^*}$$

$$\rightarrow \frac{dP}{dE} = \frac{1}{2\gamma \beta p^*} \begin{cases} \gamma(1+\beta)E^* & \text{max} \\ \gamma(1-\beta)E^* & \text{min} \end{cases}$$

Lo spettro energetico dei neutrini nel LAB e' quindi molto largo, cosicche' in genere l'energia del neutrino, per un dato evento, non e' nota. In certe condizioni sperimentali e' tuttavia possibile ottenere l'energia del neutrino considerando l'angolo di emissione; si consideri, a titolo di esempio semplificato, una situazione come questa:



La relazione fra angolo di decadimento ed energia si trova direttamente con la conservazione del 4-impulso:

$$\begin{aligned}
 p_\pi &= p_\mu + p_\nu \rightarrow p_\mu = p_\pi - p_\nu \rightarrow (p_\mu)^2 = (p_\pi - p_\nu)^2 \\
 m_\mu^2 &= m_\pi^2 - 2p_\pi \cdot p_\nu \rightarrow m_\pi^2 - m_\mu^2 = 2(E_\pi E_\nu - \mathbf{p}_\pi \cdot \mathbf{p}_\nu) \\
 \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2(E_\pi - p_\pi \cos \theta_\nu)} &= E_\nu
 \end{aligned}$$

Se $E_\pi \gg m_\pi$

$$E_\nu \approx \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2E_\pi(1 - \cos \theta)} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{4E_\pi \sin^2 \theta/2}$$

Per angoli piccoli:

$$E_\nu \approx \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{E_\pi \theta^2}$$

Quindi una misura di θ da l'energia del neutrino

b) Decadimento in 3 corpi; Dalitz plot

Abbiamo visto prima che nel decadimento in 2 corpi il modulo dell'impulso nel CM e' fissato una volta fissate le masse a riposo delle particelle (madre e figlie). Questo non e' piu' vero nel decadimento in >2 corpi, nel quale le particelle figlie hanno un numero maggiore di gradi di liberta'.

Gradi di liberta' in un decadimento o in una reazione

Se consideriamo uno stato finale a n corpi, nel quale tutte le masse delle particelle siano fissate, il numero totale di componenti dell'impulso e' $N=3n$. Lo stato finale e' il risultato di

una reazione o di un decadimento, processi per i quali normalmente e' noto lo stato iniziale (massa a riposo, impulso); tenuto conto delle leggi di conservazione del 4-impulso (4 equazioni di conservazione indipendenti), lo stato finale ha dunque $N' = N - 4 = 3n - 4$ gradi di liberta' (\leftarrow significato: in assenza di altri vincoli, p.es. di tipo dinamico, le particelle dello stato finale si presentano in molte configurazioni cinematiche equivalenti, quindi p.es. con direzioni di volo ed impulsi diversi da un caso all'altro, tutte per altro consistenti con la conservazione del 4-impulso totale). La situazione e' analoga per certi versi a quella di un sistema termodinamico, in cui ci sono di solito molti micro-stati corrispondenti a un dato macro-stato: lo stato finale con 4-impulso totale P puo' realizzarsi in molti modi equivalenti, in

ciascuno dei quali la condizione $\sum_{i=1}^{N_{part}} p_i^\mu = P^\mu$ e' verificata con un primo membro a composizione differente. Il numero di gradi di liberta' di una reazione o decadimento e' dunque uguale al numero di variabili cinematiche indipendenti per lo stato finale

Esempio: 2 corpi, $n=2 \rightarrow N'=6-4=2$ gradi di liberta'; intuitivamente, possono essere visualizzati come gli angoli θ e ϕ della direzione di volo nel CM

Esempio: 3 corpi, $n=3, \rightarrow N'=9-4=5$ gradi di liberta'; questo e' meno intuitivo da visualizzare: si possono scegliere, p.es., massa invariante (v.dopo) di 2 delle 3 particelle figlie, direzione di volo nel CM della terza (2 angoli), angoli di decadimento della coppia nel suo CM.

Nella pratica sperimentale, spesso il numero di questi gradi di liberta' deve essere confrontato con il numero di grandezze cinematiche misurate: la differenza fra i due numeri, +va o -va, e' un indice della qualita' della ricostruzione dell'evento

Nei processi che producono piu' di due particelle nello stato finale, l'uso degli invarianti semplifica notevolmente la descrizione matematica.

Si consideri la somma di due 4-impulsi, p.es. p_1 e p_2 , associati a due delle tre particelle dello stato finale:

$$P^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$$

Sara' possibile ovviamente considerare il modulo quadro di P , dato da

$$P^2 = (E_1 + E_2, \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2$$

Questa quantità, che è evidentemente un invariante, sarebbe la massa a riposo al quadrato se P fosse il 4-impulso di una particella elementare; se P è caratteristico, come in questo caso, di un sistema composto, P^2 si chiama *massa invariante* del sistema stesso, del quale rappresenta una caratteristica appunto invariante, alla stessa stregua della massa a riposo di una particella. Si noti che la massa invariante dipende non solo dalle masse a riposo, ma anche dagli impulsi (in modulo e direzione) delle particelle componenti. Per un decadimento a 3 corpi, applichiamo la legge di conservazione del 4-impulso:

$$P = p_1 + p_2 + p_3$$

Possiamo ora definire alcuni invarianti, il cui significato fisico risulta semplice da cogliere:

$$\begin{aligned} s &= P^2 = M^2 \\ s_1 \equiv s_{23} &= (P - p_1)^2 = (p_2 + p_3)^2 \\ s_2 \equiv s_{13} &= (P - p_2)^2 = (p_1 + p_3)^2 \\ s_3 \equiv s_{12} &= (P - p_3)^2 = (p_1 + p_2)^2 \end{aligned}$$

s è banale; s_1 , s_2 e s_3 sono le masse invarianti al quadrato delle 3 coppie di particelle che si possono formare con lo stato finale a 3 corpi; si noti che la coppia interessata è ogni volta quella che non contiene l'indice i di s_i (questo è il senso della seconda notazione indicata). I 3 invarianti s_1 , s_2 e s_3 non sono indipendenti, visto che vale la relazione:

$$s_1 + s_2 + s_3 = M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$$

Quindi ogni coppia di masse invarianti s_i può assumere valori qualsiasi, all'interno di una regione di variabilità determinata dai valori delle masse a riposo che sono in gioco. Per convincersi di questa affermazione, per altro piuttosto ovvia, si può calcolare p.es. s_1 nel CM della particella madre: allora

$$s_1 = M^2 + m_1^2 - 2ME_1$$

Poiché $E_1 \geq m_1$, si ha

$$s_1 \leq (M - m_1)^2$$

Ricordando la formula per la massa invariante, si vede anche che

$$s_1 \equiv s_{23} \geq (m_2 + m_3)^2$$

Quindi, ripetendo le considerazioni per s_2 e s_3 , si trova:

$$(m_2 + m_3)^2 \leq s_1 \leq (M - m_1)^2$$

$$(m_1 + m_3)^2 \leq s_2 \leq (M - m_2)^2$$

$$(m_1 + m_2)^2 \leq s_3 \leq (M - m_3)^2$$

La regione definita dalle disuguaglianze trovate non e' tuttavia interamente accessibile allo stato finale; occorre quindi trovare i limiti p.es. di s_2 per s_1 fissato. Questo si puo' fare nel seguente modo: si sceglie il riferimento coincidente con il CM di 2 e 3 (*sistema di Jackson*); indicando con un $\hat{}$ le variabili cinematiche in questo riferimento si ha:

$$\hat{\mathbf{p}}_2 = -\hat{\mathbf{p}}_3$$

$$\hat{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{P}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= (E^\wedge - E_1^\wedge)^2 = \left(\sqrt{M^2 + |\mathbf{p}_1^\wedge|^2} - \sqrt{m_1^2 + |\mathbf{p}_1^\wedge|^2} \right)^2 \\ &= (E_2^\wedge + E_3^\wedge)^2 \end{aligned}$$

da cui si estrae

$$|\mathbf{p}_1^\wedge|^2 = \lambda(s_1, M^2, m_1^2)$$

$$|\mathbf{p}_2^\wedge|^2 = \lambda(s_1, m_2^2, m_3^2)$$

$$|\mathbf{p}_3^\wedge|^2 = \lambda(s_1, m_2^2, m_3^2)$$

con

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$$

Ora consideriamo s_2 :

$$s_2 = (p_1 + p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 + 2(E_1^\wedge E_3^\wedge - \hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_3)$$

Poiche' s_2 dipende solo dall'angolo fra 1 e 3 (p_2^\wedge e p_3^\wedge sono uguali e fissi), si avra' per i valori estremi di s_2 :

$$s_{2\pm} = m_1^2 + m_3^2 + 2(E_1^{\wedge} E_3^{\wedge} \pm p_1^{\wedge} p_3^{\wedge})$$

Esprimendo E_1^{\wedge} e E_3^{\wedge} in termini di s_1 , si ottiene

$$s_{2\pm} = m_1^2 + m_2^2 + \frac{1}{2s_1} \left[(s - s_1 - m_1^2)(s - m_2^2 + m_1^2) \pm \lambda^{1/2}(s_1, s, m_1^2) \lambda^{1/2}(s_1, m_2^2, m_3^2) \right]$$

Questa equazione definisce una curva nel piano (s_1, s_2) , che determina i limiti della regione ammessa. Si possono poi anche ricavare i valori massimi degli impulsi delle particelle figlie nel riferimento di quiete della particella madre: riprendendo

$$s_1 = M^2 + m_1^2 - 2ME_1$$

si vede che E_1^{\max} , e quindi anche p_1^{\max} , corrispondono a $s_1^{\min} \equiv s_{1-}$.

Estraendo E_1, p_1 dall'espressione data sopra, si trova:

$$|p_1^{\max}| = \frac{1}{2M} \sqrt{\left[M^2 - (m_1 + m_2 + m_3)^2 \right] \left[M^2 - (m_2 + m_3 - m_1)^2 \right]}$$

c) Reazioni a due corpi

Si consideri la collisione fra un proiettile (1), in moto lungo l'asse z , e un bersaglio (2) in quiete nel sistema del LAB, che ha come effetto quello di generare uno stato finale a 2 corpi (3) e (4), che possono o no coincidere con quelli dello stato iniziale. Il 4-impulso totale P di proiettile e bersaglio ha componenti, nei 2 sistemi di riferimento, sugli stati iniziale e finale:

LAB						CM					
	P	p_1	p_2	p_3	p_4		P	p_1	p_2	p_3	p_4
E	E_1+m_2	E_1	m_2	E_3	E_4	E^*	$E^*_1+E^*_2$	E^*_1	E^*_2	E^*_3	E^*_4
p_x	0	0	0	p_{x3}	p_{x4}	p_x^*	0	0	0	p'^*_x	$-p'^*_x$
p_y	0	0	0	p_{y3}	p_{y4}	p_y^*	0	0	0	p'^*_y	$-p'^*_y$
p_z	p_1	p_1	0	p_{z3}	p_{z4}	p_z^*	0	p^*	$-p^*$	p'^*_z	$-p'^*_z$

Si noti come il modulo dell'impulso nel CM non sia necessariamente lo stesso per lo stato iniziale e finale, in conseguenza della possibile differenza fra le masse a riposo di (1, 2) e (3, 4)

Velocita' del centro di massa nel sistema del laboratorio

Nello studio delle collisioni, spesso si devono prendere in considerazione almeno due diversi riferimenti: il *centro di massa* (che dovrebbe in realta' essere chiamato *centro degli impulsi*), nel quale la quantita' di moto totale $e' = 0$, e il *laboratorio*, nel quale una delle due particelle che si urtano, il bersaglio, ha quantita' di moto nulla. Per molti scopi occorre poter trasformare diverse grandezze fisiche da un riferimento all'altro: per esempio, le sezioni d'urto vengono calcolate teoricamente nel CM, ma vengono misurate sperimentalmente nel LAB. Limitandoci per il momento alla trasformazioni di un 4-impulso, dobbiamo usare la trasformazione di Lorentz, p.es. nella forma indicata sopra. Si pone allora il problema di calcolare la velocita' relativa $v = \beta c$ fra i due sistemi, quantita' che normalmente non e' nota. Sono invece di solito noti l'impulso del proiettile nel laboratorio, e le masse e riposo di proiettile e bersaglio. Per calcolare la velocita' relativa ci si ricorda delle relazioni fra energia, impulso e massa a riposo:

$$\beta = \frac{|\mathbf{p}|}{E}, \gamma = \frac{E}{m}, \beta\gamma = \frac{|\mathbf{p}|}{m}$$

Quel che cerchiamo e' $\beta =$ velocita' del CM vista dal LAB, o $-\beta =$ velocita' del LAB vista dal CM. Supponiamo che il proiettile si muova lungo l'asse z, e che gli assi dei due riferimenti siano allineati. Nel LAB, l'impulso totale e' \mathbf{p}_p (il bersaglio e' fermo), e l'energia totale e' $E_p + m_b$ (per lo stesso motivo). Quindi il 4-impulso totale

$$p = (E_p + m_b, \mathbf{p}_p)$$

L'insieme delle 2 particelle si puo' quindi considerare come una "particella equivalente", che si muove con velocita' $\beta = \frac{|\mathbf{p}|}{E} = \frac{|\mathbf{p}_p|}{m_b + E_p}$.

Nel CM, questa stessa "particella" ha, per definizione, 4-impulso totale $p^* = (E_p^* + E_b^*, \mathbf{0})$; quindi il sistema delle 2 particelle e' in questo caso equivalente ad una particella ferma, di "massa a riposo" $m_{pb} = E_p^* + E_b^*$. Allora, la velocita' β e' proprio la velocita' del CM nel laboratorio; esplicitamente essa si scrive, in termini delle quantita' note indicate sopra:

$$\beta = \frac{|\mathbf{p}_p|}{m_b + \sqrt{m_p^2 + |\mathbf{p}_p|^2}}$$

Questa e' dunque la velocita' cercata, da usare nella trasformazione di Lorentz di un qualsiasi 4-impulso (p.es., di uno dei prodotti della reazione).

Costruiamo alcuni invarianti utili:

i) $|4\text{-impulso totale}|^2 = E_n \text{ totale nel CM al quadrato}$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 = P^2$$

Relazioni utili:

$$s = (E_1^* + E_2^*)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1$$

$$s = (E_3^* + E_4^*)^2 = m_3^2 + m_4^2 + 2(E_3 E_4 - \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_4)$$

$$E_1 = \frac{1}{2m_2} (s - m_1^2 - m_2^2)$$

$$|\mathbf{p}| = \frac{1}{2m_2} \lambda^{1/2} (s, m_1^2, m_2^2)$$

$$|\mathbf{p}|^* = \frac{m_2 \lambda^{1/2} (s, m_1^2, m_2^2)}{2\sqrt{s}}$$

$$E_{1,2}^* = \frac{(s + m_{1,2}^2 - m_{2,1}^2)}{2\sqrt{s}}$$

$$E_{3,4}^* = \frac{(s + m_{3,4}^2 - m_{4,3}^2)}{2\sqrt{s}}$$

L'en. totale nel CM, \sqrt{s} , e' una quantita' importante nel caso di reazioni con produzione di particelle: l'en. totale nel CM minima perche' possa avvenire una data reazione, nella quale sono prodotte n particelle di masse a riposo m_1, m_2, \dots, m_n , e':

$$\sqrt{s} \geq \sum_{i=1}^n m_i \text{ (en. di soglia per la reazione).}$$

L'esistenza di una soglia per \sqrt{s} implica come e' ovvio una soglia per E_{LAB} : in effetti, per un esperimento a targhetta fissa:

$$\sqrt{s} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2M_2 E_1} \geq \sum_i m_i$$

$$\rightarrow E_1 \geq \frac{\left(\sum_i m_i\right)^2 - (M_1^2 + M_2^2)}{2M_2}$$

mentre per un esperimento a un collider simmetrico (si osservi che in questo caso $CM = LAB$):

$$(E, \mathbf{p}) + (E, -\mathbf{p}) = (2E, \mathbf{0}) \geq \left(\sum_i m_i, \mathbf{0} \right)$$

$$\rightarrow E \geq \frac{\left(\sum_i m_i \right)}{2}$$

Confrontando la soglia nel LAB con quella nel CM, si nota il vantaggio decisivo di una macchina di tipo collider su una a bersaglio fisso, per la produzione di stati a massa elevata: l'energia richiesta per i fasci e' molto piu' bassa! Tale vantaggio e' tuttavia in parte compensato dalla maggiore difficolta' a realizzare collider ad elevata luminosita', necessari se la sezione d'urto di produzione degli stati voluti e' piccola. In ogni caso, e' evidente la tendenza generale a costruire collider piuttosto che macchine a bersaglio fisso.

ii) $|4\text{-impulso trasferito}|^2$ dal fascio

Se ne possono, come e' ovvio, definire due:

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2$$

Relazioni utili:

$$\begin{aligned}
t &= m_1^2 + m_3^2 - 2(E_1^* E_3^* - \mathbf{p}_1^* \cdot \mathbf{p}_3^*) = m_2^2 + m_4^2 - 2m_2 E_4 \\
u &= m_1^2 + m_4^2 - 2(E_1^* E_4^* - \mathbf{p}_1^* \cdot \mathbf{p}_4^*) = m_2^2 + m_3^2 - 2m_2 E_3 \\
\cos \theta_3 &= \frac{(s - m_1^2 - m_2^2)(m_2^2 + m_3^2 - u) + 2m_2^2(m_2^2 + m_4^2 - s - u)}{\lambda(s, m_1^2, m_2^2) \lambda(s, m_3^2, m_4^2)} \\
\cos \theta_3^* &= \frac{s^2 + s(2t - m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 - m_4^2) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{\lambda(s, m_1^2, m_2^2) \lambda(s, m_3^2, m_4^2)} \\
|\mathbf{p}|_1 &= \frac{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}{2m_2} \\
|\mathbf{p}|_3 &= \frac{\lambda(u, m_2^2, m_3^2)}{2m_2} \\
|\mathbf{p}|_4 &= \frac{\lambda(t, m_2^2, m_4^2)}{2m_2} \\
s + t + u &= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2
\end{aligned}$$

La reazione piu' semplice da considerare e' naturalmente quella dello scattering elastico; in questo caso, assumendo $m_1=m_3$, $m_2=m_4$:

$$\begin{aligned}
t &= m_1^2 + m_3^2 - 2(E_1^* E_3^* - \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{p}^*) = 2m_1^2 - 2(E_1^{*2} - |\mathbf{p}|^{*2} \cos \theta^*) \\
\rightarrow t &= -2|\mathbf{p}|^{*2} (1 - \cos \theta^*) \\
\rightarrow \cos \theta^* &= 1 + \frac{t}{2|\mathbf{p}|^{*2}}
\end{aligned}$$

d) Reazioni a molti corpi

Ad energie elevate (leggi: superiori a 1-2 GeV nel CM) la grande maggioranza dei processi a interazione forte produce stati finali con piu' di 2 particelle; questo vale, con le opportune correzioni e integrazioni, anche per processi elettrodeboli. Diventa quindi sempre piu' difficile, all'aumentare dell'energia, fornire una descrizione cinematica completa dell'evento: il numero di gradi di liberta' e' troppo elevato per consentire sia una ricostruzione sperimentale completa, sia una descrizione teorica dettagliata. Di conseguenza, la strategia punta di solito a identificare un sottoinsieme delle particelle dello stato finale, del quale si studiano in dettaglio le caratteristiche. Le quantita' di interesse fisico sono in questo caso da identificarsi nelle *sezioni d'urto inclusive* per processi non completamente specificati; p.es. con il nome di *Deep Inelastic Scattering* si intende un processo del tipo

$$e^{\pm} + N \rightarrow e^{\pm} + X$$

in cui si misura l'impulso dell'elettrone diffuso, ma si ignorano del tutto la struttura e le caratteristiche dello stato X che accompagna l'elettrone nello stato finale, richiedendo solo che non si tratti di un singolo nucleone (e che il 4-impulso trasferito a X sia elevato). E' anche possibile considerare *processi semi-inclusivi*, nei quali si misura qualcosa, ma non tutto, dello stato X :

$$e^{\pm} + N \rightarrow e^{\pm} + K^{\mp} + X'$$

6. Spazio delle fasi

Il fattore di spazio delle fasi compare nell'espressione della sezione d'urto e della probabilita' di decadimento, insieme al flusso incidente e all'elemento di matrice. In generale si ha che fare, per la probabilita' di transizione, con un'espressione del tipo seguente:

$$w \propto \int d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2 \dots d^3\mathbf{p}_n \delta^4(P - p_1 - p_2 - \dots - p_n) \frac{1}{2E_1} \frac{1}{2E_2} \dots \frac{1}{2E_n} F_{in \rightarrow out}$$

nella quale:

- *i fattori $\frac{d^3\mathbf{p}_i}{2E_i}$ sono invarianti*
- *l'integrale e' fatto su un certo numero di variabili, fra 1 e 3n; le variabili sulle quali non si integra restano come variabili indipendenti, dalle quali dipende w*
- *l'integrale multiplo e' esteso a tutta la regione accessibile nello spazio degli impulsi, stante la presenza del vincolo rappresentato dalla funzione δ .*

Se l'elemento di matrice e' costante (leggi: indipendente dal valore degli impulsi nello stato finale), ovviamente esce dall'integrale; in questo caso la dipendenza funzionale della probabilita' di transizione dagli impulsi nello stato finale e' tutta e sola quella del fattore di spazio delle fasi. Molto spesso l'evidenza di effetti dinamici viene rivelata confrontando le distribuzioni statistiche osservate con quelle previste in base al solo spazio delle fasi.

Definiamo quindi l'integrale totale sullo spazio delle fasi come

$$R_n(E) = \int \delta^4(P - p_1 - p_2 - \dots - p_n) \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2} \dots \frac{d^3\mathbf{p}_n}{2E_n}$$

Definito in questo modo, R_n e' una funzione dell'energia totale E (uguale nello stato iniziale e finale), ed e' una misura del *peso statistico totale* della configurazione dello stato finale. E' abbastanza intuitivo come sia possibile limitare l'integrazione solo ad alcuni dei gradi di liberta' dello stato finale, ottenendo *distribuzioni statistiche* di R_n rispetto a una o piu' variabili dello stato finale (come momenti, angoli, masse invarianti di alcune delle particelle dello stato finale).

Conviene concretizzare quanto detto a qualche caso specifico, tenendo conto che in molte situazioni pratiche il calcolo analitico e' impossibile e si ricorre a quello numerico

a. Stato finale a 2 corpi

Prima di eseguire le integrazioni, dobbiamo decidere a cosa siamo interessati: sappiamo gia' che uno stato finale a 2 corpi ha 2 gradi di liberta', dei quali uno solo e' in genere fondamentale (per visualizzare la cosa, pensiamo a uno scattering: l'angolo polare nel CM e' l'angolo interessante, mentre quello azimutale attorno alla direzione del fascio e' di solito irrilevante; se abbiamo un decadimento, possiamo scegliere gli angoli polari nel CM della particella madre, arrivando alle stesse conclusioni). Possiamo quindi interessarci alle distribuzioni angolari nel CM, o ad altre distribuzioni statistiche equivalenti, come previste dal puro spazio delle fasi. Come ottenerle? Si tratta in concreto di eseguire le integrazioni di cui sopra su una parte delle variabili di integrazione, con la complicazione del vincolo dato dalla funzione δ . E' utile ricordare una proprieta' importante dell'elemento invariante di spazio delle fasi:

$$\frac{d^3 p}{2E} = \int d^4 p \vartheta(E) \delta(p^2 - m^2)$$

dove $\vartheta(E)$ e' la funzione gradino unitario (che spesso viene sottointesa).

Questo si puo' vedere nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\delta[f(x)] &= \sum_{\text{zeri di } f} \frac{\delta(x-x_i)}{\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_i}} \\
f(x) &: p^2 - m^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 \\
\text{zeri} &: E_{\pm} = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \\
\left| \frac{\partial f}{\partial E} \right|_{E_{\pm}} &= 2E \\
\delta(p^2 - m^2) &= \frac{\delta(E - E_+) + \delta(E - E_-)}{2E} \\
\int d^4 p \vartheta(E) \delta(p^2 - m^2) &= d^3 \mathbf{p} \int dE \vartheta(E) \frac{\delta(E - E_+) + \delta(E - E_-)}{2E} \\
&= \frac{d^3 \mathbf{p}}{2E}
\end{aligned}$$

Allora l'integrale totale sullo spazio delle fasi a 2 corpi e':

$$R_2(E) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{2E_1} \frac{d^3 \mathbf{p}_2}{2E_2} \delta^4(P - p_1 - p_2) = \int \delta^4(P - p_1 - p_2) \delta[p_1^2 - m_1^2] \delta[p_2^2 - m_2^2] d^4 p_1 d^4 p_2$$

Eseguiamo prima l'integrazione su p_2 , che e' facile data la presenza della funzione δ

$$\begin{aligned}
R_2(E) &= \int \delta^4(P - p_1 - p_2) \delta[p_1^2 - m_1^2] \delta[p_2^2 - m_2^2] d^4 p_1 d^4 p_2 \\
&= \int \delta[p_1^2 - m_1^2] \delta[(P - p_1)^2 - m_2^2] d^4 p_1
\end{aligned}$$

Si noti come l'argomento delle δ entro l'integrale sia un invariante, che quindi si puo' calcolare in ogni riferimento: se siamo in presenza di un decadimento, (cosa che si puo' sempre assumere, considerando il processo di collisione come fatto di due parti, la formazione di uno stato intermedio con 4-impulso (E_{tot} , \mathbf{p}_{tot}), e il successivo decadimento di quest'ultimo), possiamo usare il CM della particella madre. ottenendo:

$$\begin{aligned}
\delta[(P - p_1)^2 - m_2^2] &= \delta[(M - E_1^*)^2 - \mathbf{p}_1^{*2} - m_2^2] \\
&= \delta[(M^2 + E_1^{*2} - 2ME_1^*) - \mathbf{p}_1^{*2} - m_2^2] \\
&= \delta[M^2 - 2ME_1^* + m_1^2 - m_2^2]
\end{aligned}$$

Allora l'integrale si riscrive:

$$\begin{aligned}
R_2(E) &= \int \delta[p_1^2 - m_1^2] \delta[(P - p_1)^2 - m_2^2] d^4 p_1 \\
&= \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1^*}{2E_1^*} \delta[M^2 - 2ME_1^* + m_1^2 - m_2^2] \\
&= \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1^*}{2E_1^*} \delta[M^2 - 2ME_1^* + m_1^2 - m_2^2]
\end{aligned}$$

Ora si ha che:

$$\begin{aligned}
E^2 &= p^2 + m^2 \rightarrow EdE = pdp \rightarrow dp = \frac{E}{p} dE \\
d^3 \mathbf{p} &= p^2 dp d\Omega = p^2 \frac{E}{p} dE d\Omega = pEdEd\Omega
\end{aligned}$$

Quindi:

$$R_2(E) = \frac{1}{2} \int p_1^* \delta[M^2 - 2ME_1^* + m_1^2 - m_2^2] dE_1^* d\Omega_1^*$$

Usando la solita proprieta' della δ si ha infine:

$$\begin{aligned}
R_2(E) &= \frac{P_1^*}{4M} \int d\Omega_1^* \\
P_1^* = P_2^* &= \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} = \frac{\lambda^{1/2}(M^2, m_1^2, m_2^2)}{2M} \\
\rightarrow R_2(E) &= \frac{\lambda^{1/2}(M^2, m_1^2, m_2^2)}{8M^2} \int d\Omega_1^*
\end{aligned}$$

Un'integrazione sull'angolo solido fornisce il rate totale:

$$R_2(E) = \frac{\pi \lambda^{1/2}(M^2, m_1^2, m_2^2)}{2M^2} = \frac{\pi P^*}{2M}$$

essendo P^* l'impulso nel CM dei prodotti del decadimento.

Viceversa, si puo' non integrare sugli angoli, ed ottenere il *rate angolare* nel CM:

$$\frac{dR_2(E)}{d\Omega_1^*} = \frac{\lambda^{1/2}(M^2, m_1^2, m_2^2)}{8M^2}$$

Il rapporto con il rate totale fornisce la *distribuzione angolare* nel CM:

$$\frac{dw}{d\Omega_1^*} = \frac{1}{4\pi}$$

uniforme e normalizzata a 1, come atteso

b. Stato finale a 3 corpi

Procedendo come nel caso precedente, possiamo scrivere l'espressione per il rate totale:

$$R_3(E) = \int \prod_{i=1}^3 \frac{d^3 p_i}{2E_i} \delta^4(P - p_1 - p_2 - p_3)$$

Integriamo inizialmente su \mathbf{p}_2 , nel sistema del CM:

$$R_3(E) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1 d^3 \mathbf{p}_3}{8E_1 E_2 E_3} \delta(E - E_1 - E_2 - E_3)$$

in cui:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_2 &= -(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3) \rightarrow E_2^2 = |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3|^2 + m_2^2 \\ &\rightarrow E_2^2 = p_1^2 + p_3^2 + 2p_1 p_3 \cos \theta_{13} + m_2^2 \end{aligned}$$

Si puo' esplicitare:

$$\begin{aligned} d^3 \mathbf{p}_1 d^3 \mathbf{p}_3 &= p_1^2 dp_1 d\Omega_1 p_3^2 dp_3 d\Omega_3 \\ &= E_1 p_1 dE_1 d\Omega_1 E_3 p_3 d\Omega_3 \end{aligned}$$

in cui gli angoli θ_3, ϕ_3 sono misurati rispetto alla direzione θ_1, ϕ_1 : questo si puo' fare, visto che per misurare gli angoli della particella 3 ci si puo' riferire ad un asse polare qualsiasi (quindi va bene anche la direzione della particella 1).

Ora, osservando che

$$E_2^2 = p_1^2 + p_3^2 + 2p_1 p_3 \cos \theta_{13} + m_2^2 \rightarrow \frac{\partial E_2}{\partial \cos \theta_{13}} = \frac{p_1 p_3}{E_2}$$

possiamo scrivere l'integrale come:

$$R_3(E) = \int \frac{E_1 p_1 dE_1 d\Omega_1 E_3 p_3 dE_3 d(\cos \theta_{13}) d\varphi_3}{8E_1 E_2 E_3} \delta(E - E_1 - E_2 - E_3)$$

ed eseguire l'integrazione su $\cos\theta_{13}$ (essa si riporta a un'integrazione che elimina la δ , visto che $\cos\theta_{13}$ dipende da E_2):

$$R_3(E) = \int \frac{E_1 p_1 dE_1 d\Omega_1 E_3 p_3 dE_3 d\varphi_3}{8E_1 E_2 E_3 (p_1 p_3 / E_2)} = \frac{1}{8} \int dE_1 d\Omega_1 dE_3 d\varphi_3$$

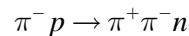
Questa e' l'espressione del rate totale; le variabili angolari non sono vincolate e si integrano subito; rimane:

$$R_3(E) = \pi \int dE_1 dE_3$$

dove l'integrale e' esteso alla regione cinematicamente permessa nel piano E_1, E_2 (v. prima discussione sul Dalitz plot). Il rate differenziale nelle 2 energie e' dato da

$$\frac{d^2 R_3(E)}{dE_1 dE_2} = \pi$$

espressione che mostra come la popolazione statistica nel Dalitz plot sia uniformemente distribuita, quando, come in questo calcolo, non si consideri l'effetto dell'elemento di matrice. Ogni effetto dinamico si palesa quindi come una alterazione dell'uniformita' della distribuzione. Questo effetto e' mostrato nel grafico sotto riportato, nel quale si vedono dati sperimentali relativi alla reazione



ad un'energia nel CM di circa 3.8 GeV. La figura rappresenta appunto il Dalitz plot della reazione, nella rappresentazione in cui si usano le masse invarianti di 2 coppie di particelle dello stato finale: ogni punto rappresenta un evento. Gli addensamenti e le rarefazioni di punti sperimentali all'interno della regione permessa, che, come abbiamo visto, dovrebbe essere uniformemente popolata in base alla pura cinematica, sono un segno evidente della presenza di forti effetti dinamici; va notato che nella rappresentazione con masse invarianti l'uniformita' e' attesa per le masse al quadrato (v. sotto). I plot 1-dimensionali sui lati del Dalitz plot sono le sue proiezioni

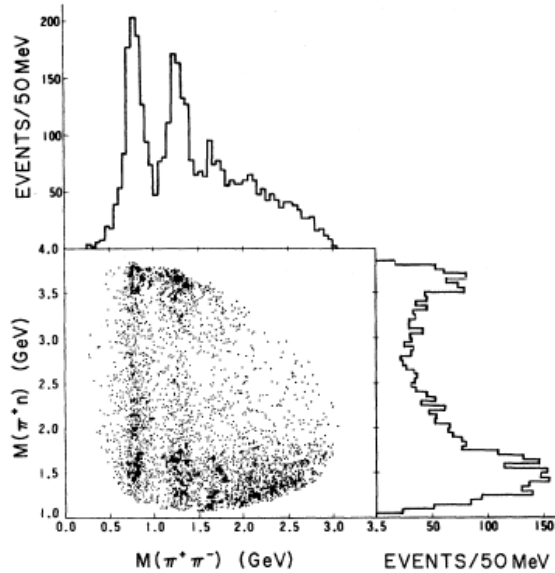


FIG. 2. Scatter plot of $M(\pi^+\pi^-)$ versus $M(\pi^+n)$ with the projections on both axes.

Dalitz plot in termini di variabili diverse

E' equivalente rappresentare il diagramma in termini di masse invarianti (al quadrato) di coppie di particelle o in termini di energie. Questo si puo' vedere ricavando la relazione fra energia totale di una particella e massa invariante delle altre due nella cinematica a 3 corpi: il modo piu' semplice di vedere la cosa e' quello di considerare il decadimento (o la reazione) come se avvenisse in 2 passi:

primo decadimento $M \rightarrow m_1 + m_{23}$, con m_{23} la m.invariante di 2 e 3

secondo decadimento $m_{23} \rightarrow m_2 + m_3$

Allora, possiamo esprimere l'energia nel CM di m_1, m_2, m_3 con la formula del decadimento in 2 corpi:

$$E_1^* = \frac{M^2 + m_1^2 - m_{23}^2}{2M}$$

$$E_2^* = \frac{M^2 + m_2^2 - m_{13}^2}{2M}$$

$$E_3^* = \frac{M^2 + m_3^2 - m_{12}^2}{2M}$$

Quindi e' equivalente usare le energie nel CM (quantita' per altro non invarianti) o le masse invarianti (al quadrato)

Decadimento in 3 particelle di massa uguale

E' il caso di diversi decadimenti interessanti, fra i quali p.es.

$$K \rightarrow 3\pi$$

$$\eta \rightarrow 3\pi$$

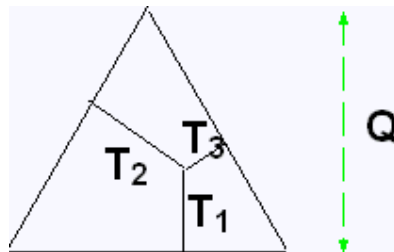
$$\omega \rightarrow 3\pi$$

(il primo e' un decadimento debole, il secondo elettromagnetico, il terzo forte), nei quali si trascura la differenza di massa fra pioni neutro e carico. In questo caso c'e' una rappresentazione interessante, nella quale si plottano in un grafico triangolare le 3 energie cinetiche (nel CM) delle particelle dello stato finale. Deve allora valere:

$$T_i = E_i^* - m$$

$$\sum_{i=1}^3 T_i = M - 3m = Q \quad \text{Q-valore del decadimento}$$

Se si misura T_i lungo l'altezza perpendicolare a un lato, ogni evento e' rappresentato da un punto all'interno del triangolo equilatero di altezza Q :



Introducendo coordinate polari rispetto al centro del triangolo ($T_1=T_2=T_3=Q/3$) si ha per le coordinate del punto generico entro il triangolo:

$$T_1 = \frac{Q}{3}(1 + r \cos \phi)$$

$$T_2 = \frac{Q}{3} \left(1 + r \cos \left(\phi + \frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

$$T_3 = \frac{Q}{3} \left(1 + r \cos \left(\phi - \frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

Si puo' dimostrare che la curva che delimita la regione cinematicamente permessa ha equazione:

$$(1+x)r^2 + xr^3 \cos(3\phi) = 1$$

$$x = \frac{2\varepsilon}{(2-\varepsilon)^2}, \varepsilon = \frac{Q}{M}$$

La quantità ε definisce completamente la curva; essa vale

$$\varepsilon_K = 0.17$$

$$\varepsilon_\eta = 0.23$$

$$\varepsilon_\omega = 0.47$$

In generale, se $Q \approx M \rightarrow \varepsilon \approx 1 \rightarrow x \approx 2$; se $Q \ll M \rightarrow \varepsilon \approx 0 \rightarrow x \approx 0$. Nel secondo caso la curva limite è un cerchio, nel primo ha una forma triangolare arrotondata.

7. Esempi di uso della cinematica

La cinematica relativistica si usa in tutte le fasi di un esperimento: qui si vuol dare qualche esempio di come le leggi di conservazione permettano di trarre informazioni dai dati sperimentali.

Esempio: fit cinematico

Nello studio di una reazione, normalmente il 4-vettore dello stato iniziale è noto con alta precisione, di solito nel sistema del LAB. Poiché in reazioni ad alta energia uno stesso stato iniziale conduce a molti diversi stati finali, costituiti da un diverso numero di particelle di tipo differente, in pratica lo stato finale di un dato evento registrato è invece di solito conosciuto meno bene: per esempio, vengono misurati gli impulsi di tutte o parte delle particelle cariche (si intende qui l'insieme delle 3 componenti cartesiane, o altre quantità equivalenti), mentre non si conoscono le masse corrispondenti (tranne nei casi in cui si disponga di un sistema di identificazione); oppure i neutri (p.es. i fotoni) sono misurati solo in una parte limitata dell'accettanza geometrica; o ancora, l'evento contiene vertici secondari di decadimento, che non si associano facilmente nella ricostruzione. La varietà di situazioni sperimentali che possono presentarsi è molto grande, ma in ogni caso l'uso delle leggi di conservazione di solito consente di convalidare con un certo grado di fiducia una particolare *ipotesi cinematica*: con questo si intende che è possibile selezionare gli eventi raccolti assegnando a ciascuno di essi l'ipotesi più verosimile sulla reazione che è effettivamente avvenuta, scelta in base a

considerazioni statistiche sulla compatibilita' dell'ipotesi stessa con le leggi di conservazione di energia e impulso. Conviene accennare brevemente alla procedura di ricostruzione cinematica di un evento, che, con molte varianti, e' tipica del software off-line di tutti gli esperimenti. La procedura si svolge in alcuni passi distinti, che nel caso piu' semplice possono essere descritti nel modo seguente:

Pattern recognition

Questa fase consiste nell'utilizzo delle informazioni provenienti dai rivelatori per la determinazione dei punti spaziali in cui la traiettoria di ogni traccia ha intersecato linee e piani che hanno posizione conosciuta nel rivelatore,

Ricostruzione geometrica

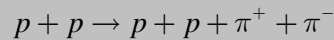
Lo scopo primario di questa fase e' l'associazione dei punti spaziali a formare tracce (l'immagine delle traiettorie delle particelle cariche o neutre). In questo modo si determina innanzi tutto il numero di tracce (cariche e/o neutre) presenti nell'evento, poi la posizione del vertice primario e di eventuali vertici secondari, caratteristici del decadimento debole di particelle con stranezza, charm, etc., e infine anche l'impulso o l'energia associata a ogni traccia, p.es. attraverso la misura del raggio di curvatura di una traccia carica in un campo magnetico o la ricostruzione dello sciame elettromagnetico generato da un fotone in un calorimetro. In una forma o nell'altra, occorre infine determinare la natura di ogni particella che ha lasciato una traccia nel rivelatore (o almeno, di un certo numero di esse). In taluni casi esistono nell'esperimento parti del rivelatore che sono in grado di dare informazioni specifiche su questo punto, come contatori Cerenkov, misuratori di ionizzazione etc; tuttavia, nella maggior parte dei casi l'identificazione di ogni particella osservata nel rivelatore non e' direttamente possibile.

Fit cinematico

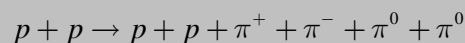
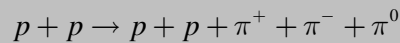
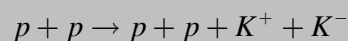
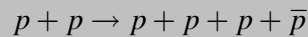
Come si e' detto, non tutte le tracce o i vertici dell'evento risultano sempre ricostruibili in questo modo, e per molte delle tracce l'identificazione in massa risulta ambigua; a volte e' possibile acquisire informazione su cio' che non si e' misurato verificando la conservazione del 4-impulso a ogni vertice, effettuando quindi quel che si chiama un fit cinematico. Fare un fit cinematico consiste nel valutare la

probabilità statistica di un'ipotesi cinematica, in cui si assegnano appunto valori ipotetici alle quantità cinematiche non note, e si costruisce un χ^2 per ogni ipotesi. Confrontando poi i χ^2 di ipotesi diverse si può scegliere quella con la massima probabilità.

Un esempio è probabilmente più chiaro di ogni descrizione astratta: Si consideri lo studio della reazione ad energia elevata



quel che abbiamo a disposizione è solo un campione di 50000 eventi a 4 tracce cariche, in ognuno dei quali 3 delle tracce sono misurate essere positive e 1 negativa; l'esperimento non è sensibile alla presenza di neutri. Questo campione quindi conterrà eventi del tipo cercato, insieme ad altri tipi di eventi che mimano quelli cercati, come per esempio:



etc

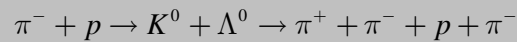
Si pone dunque il problema di separare (filtrare) gli eventi cercati dal campione indifferenziato: per questo scopo si può testare per ogni evento del campione l'ipotesi cinematica per lo stato finale cercato, richiedendo la conservazione del 4-impulso totale: ossia, verificando la compatibilità di impulsi e direzioni misurate con la conservazione del 4-impulso totale, nell'ipotesi che le tracce abbiano le masse assegnate. Si procede per questo ad assegnare provvisoriamente la massa m_1 alla traccia 1, la massa m_2 alla traccia 2 etc, e si costruisce il χ^2 dell'ipotesi facendo la differenza fra le 3 componenti dell'impulso totale misurato nello stato finale e le 3 componenti dell'impulso del fascio incidente, insieme a quella fra l'energia totale osservata nello stato finale (che dipende dall'ipotesi di massa) e quella del fascio incidente; nella costruzione del χ^2 , come è ovvio, la conoscenza degli errori di misura è essenziale.

Si osservi come la possibilità di eseguire un fit richieda che il numero totale delle equazioni di vincolo (N_c) sia maggiore del numero di quantità sconosciute (N_u): nell'esempio che stiamo considerando, non ci sono quantità sconosciute nella misura ($N_u=0$), per gli eventi che cerchiamo, quindi $N_c - N_u = 4 - 0 = 4$; diciamo che il fit è a 4 vincoli, o $4C$. Per tutti gli eventi nei quali l'ipotesi di massa è sbagliata, o per i quali è stata perduta qualche particella nello stato finale, come un π^0 nell'esempio citato, la conservazione del 4-impulso risulterà non ben soddisfatta, e il χ^2 elevato. Sempre considerando l'esempio citato, se eseguiamo un fit all'ipotesi cinematica in cui lo stato finale contiene un π^0 non rivelato, il numero di

quantita' sconosciute diventa $N_U=3$ (appunto, le 3 componenti dell'impulso del π^+), e il fit e' a $1C$.

[Notare: La capacita' discriminatoria di un fit a $4C$ e di uno a $1C$ e' estremamente diversa: la probabilita' di fluttuazioni statistiche nel χ^2 e' molto piu' alta nel secondo caso! Nella situazione ideale, pressappoco $e^{3/2} \sim 5$ volte superiore a livello di 1σ , e $e^{9/2} \sim 125$ volte a livello di 3σ].

Nel caso di reazioni contenenti decadimenti in cascata, il numero di vincoli puo' anche essere superiore a 4: p.es., nella reazione



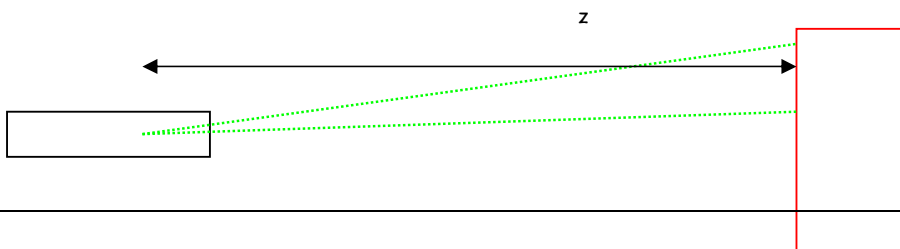
ci sono, supponendo di misurare tutti gli impulsi dei carichi nello stato finale, 12 quantita' misurate, mentre non si conoscono gli impulsi del K^0 e della Λ^0 (6 quantita' sconosciute): con 12 equazioni di vincolo (conservazione del 4-impulso totale al vertice primario, conservazione del 4-impulso a ognuno dei 2 vertici secondari) il fit e' a $6C$.

[Altro modo di contare i gradi di liberta' del fit: ignorando la presenza di decadimenti deboli e vertici secondari, nessuna quantita' sconosciuta nello stato finale, quindi $4C$; se ora ipotizziamo la presenza di due decadimenti deboli, abbiamo altri 2 vincoli, provenienti dalla richiesta che le coppie $\pi^+ + \pi^-$, $p + \pi^-$ abbiano massa invariante uguale alla massa di K^0, Λ^0 . Quindi, in totale ci sono $4+2=6C$].

Come si ricordera', la distribuzione della probabilita' di χ^2 e' uniforme, fra 0 e 1, per un campione contenente errori puramente statistici: quindi, la presenza nel campione di famiglie di eventi per i quali l'ipotesi cinematica fallisce si rivela come alterazione della distribuzione uniforme della probabilita' di χ^2 . In pratica, eventi con χ^2 elevato indicano una cattiva ricostruzione cinematica e vengono scartati. Le quantita' cinematiche ottenute dal fit per gli eventi rimasti dopo la selezione risultano inoltre meglio conosciute di quelle originali.

Esempio: uso della cinematica per ricostruire il vertice di decadimento

Si consideri la seguente situazione sperimentale: un fascio contiene mesoni K^0 di alta energia (tipicamente 100 GeV) che decadono in coppie di π^0 , risultando infine uno stato finale con 4 fotoni. Per ottenere la misura della vita media, si vuole misurare la coordinata del vertice di decadimento del K^0 dalla misura di posizione trasversale ed energia dei 4 fotoni, realizzata con un calorimetro elettromagnetico molto distante dalla zona di decadimento.



Zona decadimento

calorimetro

Supponendo di avere selezionato eventi con 4 fotoni misurati, osserviamo che l'impulso del K^0 e' diretto lungo l'asse z: quindi la somma delle componenti trasversali degli impulsi dei fotoni deve dare zero. Allora, imponendo che la massa invariante dei 4 fotoni sia quella del K^0 :

$$M^2(4\gamma) = \left(\sum_{i=1}^4 E_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^4 \mathbf{p}_i \right)^2 = m_{K^0}^2$$

Scomponendo gli impulsi nelle componenti trasversale e longitudinale si ha:

$$m_{K^0}^2 = \left(\sum_{i=1}^4 E_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^4 p_i^\perp + \sum_{i=1}^4 p_i^\parallel \right)^2$$
$$\sum_{i=1}^4 p_i^\perp = 0 \rightarrow m_{K^0}^2 = \left(\sum_{i=1}^4 E_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^4 p_i^\parallel \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^4 E_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^4 p_i \cos \theta_i \right)^2$$

Dei fotoni sono note le energie=moduli degli impulsi, e i punti di impatto sul calorimetro; inoltre, si puo' assumere che gli angoli dei fotoni siano piccoli, e che tutti i K^0 decadano sull'asse del fascio (ossia, che il diametro del fascio sia piccolo). Allora:

$$\cos \theta_i \simeq 1 - \frac{\theta_i^2}{2}$$

$$\theta_i \approx \frac{r_i}{z}$$

r_i distanza radiale asse/punto di impatto sul calorimetro

z distanza longitudinale vertice di decadimento/calorimetro

Quindi:

$$m_{K^0}^2 = \left(\sum_{i=1}^4 E_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^4 p_i \left(1 - \frac{\theta_i^2}{2} \right) \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^4 E_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^4 p_i - \sum_{i=1}^4 p_i \frac{\theta_i^2}{2} \right)^2$$

Sviluppando il quadrato del binomio:

$$\left(\sum_{i=1}^4 p_i - \sum_{i=1}^4 p_i \frac{\theta_i^2}{2} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^4 p_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^4 p_i \frac{\theta_i^2}{2} \right)^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^4 p_i \right) \left(\sum_{i=1}^4 p_i \frac{\theta_i^2}{2} \right)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} m_{K^0}^2 &= \left(\sum_{i=1}^4 E_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^4 p_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^4 p_i \frac{\theta_i^2}{2} \right)^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^4 p_i \right) \left(\sum_{i=1}^4 p_i \frac{\theta_i^2}{2} \right) \\ &= - \left(\sum_{i=1}^4 p_i \frac{\theta_i^2}{2} \right)^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^4 p_i \right) \left(\sum_{i=1}^4 p_i \frac{\theta_i^2}{2} \right) \approx 2 \left(\sum_{i=1}^4 p_i \right) \left(\sum_{i=1}^4 p_i \frac{\theta_i^2}{2} \right) \\ &= E_{tot} \sum_{i=1}^4 p_i \theta_i^2 \approx E_{tot} \sum_{i=1}^4 p_i \frac{r_i^2}{z^2} = \frac{E_{tot}}{z^2} \sum_{i=1}^4 p_i r_i^2 \end{aligned}$$

da cui infine:

$$z = \frac{1}{m_{K^0}} \sqrt{E_{tot} \sum_{i=1}^4 p_i r_i^2}$$

Evidentemente, la presenza di eventi a 4 fotoni non provenienti dal decadimento del K^0 in 2 π^0 puo' alterare la misura di z ; si osservi pero' che e' possibile verificare che la massa invariante di due coppie di fotoni sia quella del π^0 :

$$\begin{aligned} m_{ij}^2 &= \left(E_i + E_j, \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j \right)^2 \\ &= E_i^2 + E_j^2 + 2E_i E_j - |\mathbf{p}_i|^2 - |\mathbf{p}_j|^2 - 2\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j \\ &= 2|\mathbf{p}_i| |\mathbf{p}_j| (1 - \cos \theta_{ij}) \approx 2|\mathbf{p}_i| |\mathbf{p}_j| \frac{\theta_{ij}^2}{2} = |\mathbf{p}_i| |\mathbf{p}_j| \theta_{ij}^2 = m_{\pi^0}^2 ? \end{aligned}$$

La richiesta che i 4 fotoni si possano accoppiare a due a due in modo che la massa invariante di ogni coppia sia la massa del π^0 elimina il fondo residuo e convalida la misura di z .

Esempio: il "picco jacobiano" e la scoperta del W

I bosoni intermedi delle interazioni deboli furono scoperti sperimentalmente al CERN studiando collisioni protone-antiprotone

$$p + \bar{p} \rightarrow W^+ + X$$

realizzate tramite un collider nel quale le due particelle si muovono su orbite circolari con impulso uguale e opposto: il LAB coincide quindi con il CM.

A livello di costituenti, la reazione elementare e' del tipo

$$q + \bar{q} \rightarrow W^+ \rightarrow X$$

in cui il quark e l'antiquark portano una frazione sconosciuta dell'impulso del protone e dell'antiprotone. In linea generale, ci si attende che l'impulso trasversale sia piccolo, mentre si sa poco, a priori, dell'impulso longitudinale. Il W^+ viene rivelato tramite il decadimento

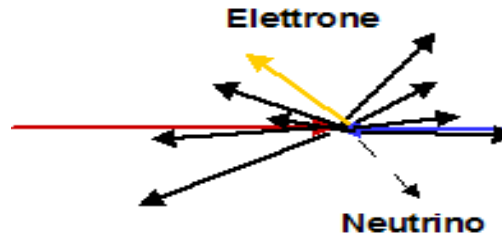
$$W^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$$

nel quale si osserva un elettrone isolato con energia minima circa equivalente a meta' della massa del W^+ :

$$E \geq \frac{M}{2}$$

La rivelazione di elettroni isolati di energia elevata e' una forte indicazione della produzione di W , tuttavia i fondi sono tali da non garantire che essa sia un segnale sufficiente. Il neutrino non puo' ovviamente essere rivelato direttamente, tuttavia e' possibile associare al segnale di elettroni ad E elevata quello di *energia mancante*: in sostanza, se nella collisione e' stato prodotto un W , come minimo nell'evento ricostruito deve mancare l'energia del neutrino, anch'essa uguale a $M/2$ (la massa dell'elettrone puo' essere trascurata a questi regimi di energia). Questa idea incontra difficolta' ad essere applicata, perche' e' alquanto probabile che non siano rivelate altre componenti dell'evento che sono prodotte a piccoli angoli, dove il rivelatore non ha accettazione; per questo motivo, si puo' cercare uno sbilanciamento di *energia trasversa*, invece che totale. In effetti, al di sopra di un angolo minimo il rivelatore ha ottima accettazione ed efficienza di rivelazione: poiche' la somma degli impulsi trasversali (presi con il loro segno, a

seconda dell'angolo azimutale) deve dare come risultato zero (v. conservazione dell'impulso), allora un evento con un neutrino di alta energia dovrà, nella maggior parte dei casi (ossia quando il neutrino non esce ad angolo piccolissimo), mostrare una energia trasversa mancante:



In sostanza si tratta di calcolare, per ogni evento ricostruito, la quantità:

$$E_{mis\ sin\ g} = 0 - E_T^{vista} = - \sum_{i=1, Ntracce} E_i \sin \theta_i$$

in cui gli angoli vanno intesi con il loro segno. Gli eventi interessanti sono quelli in cui $E_{missing} \neq 0$: se nel campione di questi ultimi ci sono eventi in cui c'è anche presenza di un elettrone isolato con energia elevata, il segnale di W diventa molto significativo (due "segnature" indipendenti...). Si noti come, malgrado la precedente analisi sia stata fatta - senza dirlo - come se il W fosse prodotto fermo, un eventuale impulso longitudinale del W nella produzione non cambia il risultato (le componenti trasversali sono invarianti per trasformazioni di Lorentz...); la produzione di W con elevato impulso trasversale cambierebbe invece le cose, ma è fortemente soppressa in ogni meccanismo dinamico che si possa ipotizzare ragionevolmente.

La cinematica aiuta anche a dare una prima stima della massa del W ; in effetti, si consideri la distribuzione angolare di decadimento nel sistema di quiete del W :

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta^*} = \text{funzione di } \cos\theta^* \text{ a variazione non troppo elevata}$$

come è ragionevole attendersi. Possiamo trasformare la distribuzione in $\cos\theta^*$ in una in p_T :

$$\frac{d\sigma}{dp_T} = \frac{d\sigma}{d\cos\theta^*} \frac{d\cos\theta^*}{dp_T}$$

$$p_T = p^* \sin\theta^* = \frac{M_W}{2} \sin\theta^*$$

$$\rightarrow \sin\theta^* = \frac{2p_T}{M_W}$$

$$\rightarrow \cos\theta^* = \sqrt{1 - \sin^2\theta^*} = \sqrt{1 - \left(\frac{2p_T}{M_W}\right)^2}$$

$$\rightarrow \frac{d\cos\theta^*}{dp_T} = \frac{\frac{4p_T}{M_W}}{2\sqrt{1 - \left(\frac{2p_T}{M_W}\right)^2}} = \frac{2p_T}{M_W \sqrt{1 - \left(\frac{2p_T}{M_W}\right)^2}}$$

Quindi la distribuzione in p_T e' dominata dal fattore "jacobiano", che e' fortemente piccato a $p_T=M_W/2$: la misura del picco di questa distribuzione fornisce quindi, in prima approssimazione, la massa del W . Tale misura e' tuttavia affetta dall'impulso trasversale del W (incognito, anche se, come detto sopra, presumibilmente piccolo)

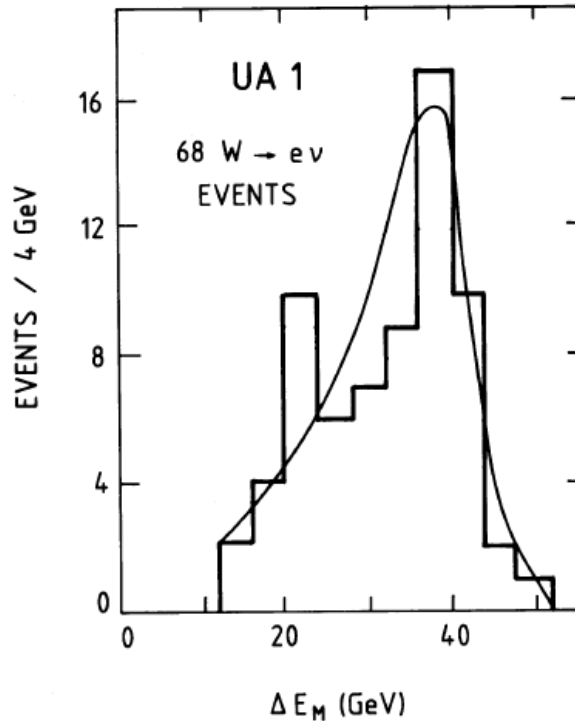
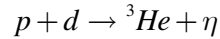


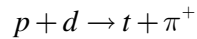
Fig. 14. The distribution of the missing transverse energy for those events in which there is a single electron with $E_T > 15$ GeV, and no coplanar jet activity. The curve represents the resolution function for no missing energy normalized to the three lowest missing-energy events.

Esempio: missing mass

A volte e' possibile identificare il tipo di particella prodotta in una reazione applicando la conservazione del 4-impulso a tutte le altre. Si consideri il seguente esempio, tratto da un esperimento svolto ad energie relativamente basse (COSY, 2005): si studia la reazione



con protoni di impulso 1.64 GeV su un bersaglio di deuterio; nella reazione si misura solo l'impulso solo del nucleo di ${}^3\text{He}$. Tale reazione e' accompagnata da reazioni di fondo, delle quali la piu' importante e':



Poiche' il decadimento dell' η non e' osservato (si misura solo l'impulso del nucleo uscente, ma non se ne conosce la carica), sorge il problema di separare gli eventi cercati da quelli di fondo. Applicando la conservazione del 4-impulso totale, si ha:

$$\begin{aligned} p_p + p_d &= p_{3\text{He}} + p_\eta \\ \rightarrow p_\eta &= p_p + p_d - p_{3\text{He}} \\ \rightarrow p_\eta^2 &= m_\eta^2 = (p_p + p_d - p_{3\text{He}})^2 \\ \rightarrow m_\eta^2 &= (E_p + E_d - E_{3\text{He}})^2 - (p_p + p_d - p_{3\text{He}})^2 \end{aligned}$$

Nel riferimento del LAB, si ha allora:

$$\begin{aligned} m_\eta^2 &= (E_p + E_d - E_{3\text{He}})^2 - (p_p + p_d - p_{3\text{He}})^2 \\ &= m_p^2 + m_d^2 + m_{3\text{He}}^2 + 2(E_p m_d - E_p E_{3\text{He}} - m_d E_{3\text{He}}) + 2p_p \cdot p_{3\text{He}} \end{aligned}$$

Si noti che nell'espressione a destra compare l'energia $E_{3\text{He}}$, che non e' misurata e non e' nota, in quanto dipendente da $m_{3\text{He}}$, non misurata dall'apparato: il senso del calcolo, in questo caso, e' proprio quello di calcolare la missing mass ipotizzando che il processo sia quello cercato. Quando effettivamente lo e', la missing mass sara' quella giusta, altrimenti il valore sara' errato, ma non rilevante ai fini dell'identificazione degli eventi voluti. In altre situazioni, puo' accadere che tutte le quantita' a destra siano effettivamente conosciute o misurate.

Misurando le quantità cinematiche che compaiono nel membro di sinistra, si ottiene, evento per evento, la massa mancante a chiudere cinematicamente l'evento, e si può di questi valori fare la distribuzione di frequenza, riportata nel seguente istogramma:

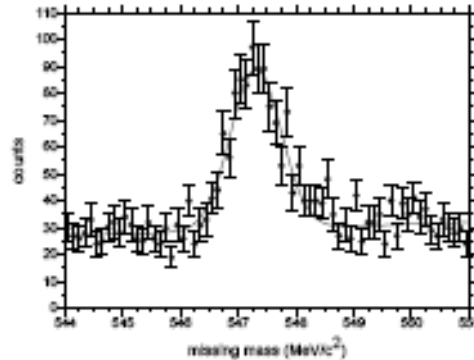


Fig. 4. The missing mass spectrum from the $p + d \rightarrow {}^3\text{He} + X$ reaction. The solid curve shows a fit with a Gaussian peak superimposed on a linear background.

Come si vede, si identifica chiaramente un picco in corrispondenza della massa dell' η . E' quindi possibile ottenere un campione di eventi della reazione cercata, mescolati ad eventi di fondo nei quali la missing mass e' casualmente uguale a quella dell' η . Per diversi scopi (qui, per la misura di precisione della massa dell' η) la presenza del fondo puo' non essere rilevante.

8. Trasformazione di sezioni d'urto e distribuzioni angolari

E' istruttivo rendersi conto delle proprietà di trasformazione fra sistemi di riferimento di sezioni d'urto e distribuzioni angolari, grandezze di primario interesse sia nei calcoli teorici sia nella pratica sperimentale. Per un'introduzione piu' dettagliata ai concetti di sezione d'urto totale e differenziale, si rimanda, oltre che ai testi consigliati, alla parte di note relative al formalismo dello scattering.

- Sezione d'urto totale

La relazione fondamentale che lega *rate di interazione* e *luminosità* di un esperimento e':

$$R = L\sigma$$

eventi al secondo
area⁻¹ tempo⁻¹
area

σ e' la *sezione d'urto totale*. Nella parte di lezioni dedicata allo scattering da potenziale e alle sue estensioni sara' richiamato il significato intuitivo (classico) di sezione d'urto, e quello meno intuitivo legato alla definizione quantistica della stessa quantita'. Quel che si vuole far emergere qui e' il fatto che, qualunque sia il significato di σ , la sua proprieta' di invarianza di Lorentz si deduce interamente dalle proprieta' di trasformazione delle grandezze R e L a cui e' legata. Consideriamo quindi le proprieta' di trasformazione delle grandezze che compaiono nell'equazione:

R ha le dimensioni dell'inverso di un tempo (in unita' naturali ha le dimensioni di un'energia), quindi non e' un invariante, essendo appunto la grandezza tempo la 4^a componente di un 4-vettore; si osservi che il fatto che la misura del rate sia frame-dependent, apparentemente controintuitivo, e' in realta' in accordo con le proprieta' di trasformazione di una frequenza (non invariante a causa della non invarianza degli intervalli di tempo): il prodotto $L\sigma$ quindi deve avere le stesse proprieta' di trasformazione. L , che ha dimensione energia³, si trasforma come un'energia. Questo e' in accordo con l'osservazione banale che l'esposizione (o *sensibilita' statistica*, o *luminosita' integrata*) di un esperimento, ossia l'integrale della luminosita' istantanea su tutto il tempo di esposizione

$$E = \int_0^T L(t) dt$$

che fornisce il numero di eventi prodotti nell'esperimento per unita' di sezione d'urto, deve evidentemente essere una quantita' invariante per trasformazioni di Lorentz (altrimenti lo stesso esperimento avrebbe sensibilita' statistiche differenti in diversi riferimenti!). Allora L deve trasformarsi come l'inverso di un tempo per compensare il fattore dt , quindi deve trasformarsi come un'energia. Poiche' R e L hanno le stesse proprieta' di trasformazione, σ deve allora essere invariante. Se interpretiamo *ingenuamente* la sezione d'urto totale σ come un'area (proiettata ortogonalmente alla velocita' relativa) associata ad ogni coppia proiettile-bersaglio, tale che quando una coppia sta entro σ interagisce, allora si comprende come la proprieta' di invarianza di σ sia legata alla sua natura *trasversale*, e quindi invariante. L'interpretazione intuitiva cade tuttavia in casi piu' generali, nei quali l'invarianza di σ e' postulata, piuttosto che dimostrata.

Consideriamo piu' in dettaglio la proprieta' di invarianza di Lorentz della sezione d'urto totale: prendiamo in esame una situazione tipica, in cui un fascio di densita' ρ_2 e velocita' β_2 bombarda un bersaglio di

densita' ρ_1 . Il numero di particelle diffuse entro l'elemento di angolo solido $d\Omega$, per unita' di tempo e unita' di volume del bersaglio, e':

$$dN = F \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = F d\sigma$$

Il fattore di flusso F ha dimensioni

$$[T^{-1}][L^{-3}][L^2] = [T^{-1}][L^{-5}]$$

e si puo' esprimere come

$$F = \rho_1 \rho_2 \beta_2$$

(Infatti, considerando un volume e un intervallo finiti, si ha:

$$\begin{aligned} \Delta N &= dN \Delta V_1 \Delta t = d\sigma \Delta N_1 \Delta N_2 = d\sigma \rho_1 \Delta V_1 \rho_2 \beta_2 \Delta t \\ \rightarrow dN \Delta V_1 \Delta t &= d\sigma \rho_1 \Delta V_1 \rho_2 \beta_2 \Delta t \rightarrow dN = d\sigma \rho_1 \rho_2 \beta_2 \end{aligned}$$

La densita' volumetrica del fascio sara', in termini di quella nel riferimento in cui il fascio stesso e' in quiete:

$$\rho_2 = \rho_2^0 \gamma = \rho_2^0 \gamma \frac{E_2}{m_2} \quad \text{effetto contrazione di Lorentz delle lunghezze}$$

Se ora guardiamo lo stesso esperimento in un altro riferimento, che si muove rispetto al primo con velocita' β_1 parallela a β_2 : allora in questo riferimento il bersaglio ha velocita' $-\beta_1$. dN non varia, perche' e':

$$dN = \frac{\Delta N}{\Delta V \Delta t}$$

e l'elemento di 4-volume e' invariante (la contrazione delle lunghezze e' compensata dalla dilatazione dei tempi). Allora sara':

$$dN = F' d\sigma'$$

e il nuovo fattore di flusso sara'

$$F' = \rho_1' \rho_2' (\beta + \beta_2') = \rho_1^0 \rho_2^0 (\beta_1 + \beta_2') \gamma_1 \gamma_2'$$

Usando la legge relativistica di composizione delle velocita'

$$\beta_2' = \frac{\beta_2 - \beta_1}{1 - \beta_1 \beta_2}$$

troviamo che $F'=F$. Quindi F e' invariante, e quindi lo e' anche $d\sigma$.

- **Sezione d'urto differenziale**

Mentre il concetto di sezione d'urto totale ha un significato indipendente dal processo particolare che si sta considerando (essendo legato alla probabilita' che avvenga fra proiettile e bersaglio un'interazione qualsiasi - definizione piuttosto chiara e apparentemente non ambigua: ma ci sono in realta' sottigliezze anche in essa), quello di sezione d'urto differenziale e' molto piu' articolato e dipendente dal processo considerato. Occorre ricordare che ci sono molte diverse sezioni d'urto differenziali: la definizione originaria, di contributo elementare alla sezione d'urto totale per le collisioni elastiche che producono uno stato finale con particelle diffuse entro un dato elemento di angolo solido, viene via via allargata a includere ogni tipo di collisioni, anche anelastiche e con produzione di nuove particelle. Diventa quindi necessario esprimere la sezione d'urto differenziale in funzione di grandezze anche diverse dall'angolo di diffusione, come p.es. l'impulso o l'energia della particella prodotta, la massa invariante di 2 o piu' particelle dello stato finale etc.

La sezione d'urto differenziale puo' evidentemente venire espressa come funzione dell'angolo di diffusione nel CM e dell'impulso della particella prodotta:

$$\frac{d^3\sigma}{d\Omega^* d|\mathbf{p}^*|} = f(\theta^*, \varphi^*, |\mathbf{p}^*|)$$

In generale, se si considera il decadimento di una particella instabile in 2 o piu' prodotti finali, e' ovviamente interessante considerare la distribuzione dei prodotti stessi, che risulta una funzione dell'impulso e degli angoli nel CM, analoga alla sezione d'urto differenziale:

$$\frac{d^3 f}{d\Omega^* d|\mathbf{p}^*|} = f(\theta^*, \varphi^*, |\mathbf{p}^*|)$$

Con opportuna normalizzazione a 1, queste quantita' rappresentano la distribuzione statistica (frequenza) degli eventi di decadimento

Se ci chiediamo quale sia la proprieta' di trasformazione di queste distribuzioni statistiche rispetto a trasformazioni di Lorentz, possiamo osservare innanzi tutto che il modulo del 3-impulso risultera' diverso nei due riferimenti; inoltre, immaginando di scegliere l'asse polare coincidente con la direzione della velocita' relativa fra i due riferimenti, si vede subito che l'angolo azimutale ϕ rimane invariato nella trasformazione, mentre

l'angolo polare θ cambia. In conclusione, occorre trovare come si trasformano l'elemento di di impulso e quello di angolo solido: si tratta quindi di eseguire una trasformazione di variabili nello spazio degli impulsi

$$p^*, \theta^*, \varphi^* \rightarrow p, \theta, \varphi \begin{cases} p = p(p^*, \theta^*, \varphi^*) \\ \theta = \theta(p^*, \theta^*, \varphi^*) \\ \varphi = \varphi(p^*, \theta^*, \varphi^*) \end{cases}$$

ricavandone lo Jacobiano (ridotto a 2 variabili vista l'invarianza dell'angolo azimutale) per trasformare l'elemento di volume nello spazio degli impulsi: operazione non difficile, visto che le variabili scelte sono equivalenti a coordinate sferiche

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial p^*}{\partial p} & \frac{\partial p^*}{\partial(\cos \theta)} \\ \frac{\partial(\cos \theta^*)}{\partial p} & \frac{\partial(\cos \theta^*)}{\partial(\cos \theta)} \end{vmatrix}$$

$$dp^* d\Omega^* = J dp d\Omega$$

Ricordando la relazione fra impulsi e angoli nel CM e nel LAB, otteniamo facilmente:

$$J = \frac{\partial p^*}{\partial p} \frac{\partial \cos \theta^*}{\partial \cos \theta} - \frac{\partial p^*}{\partial \cos \theta} \frac{\partial \cos \theta^*}{\partial p}$$

$$\operatorname{tg} \theta^* = \frac{1}{\gamma} \frac{p \sin \theta}{p \cos \theta - \beta E}$$

$$p^* = \gamma \sqrt{(E - p \beta \cos \theta)^2 - \frac{m^2}{\gamma^2}}$$

$$\rightarrow J = \frac{p^2 (E - p \beta \cos \theta)}{\gamma E \left[(E - p \beta \cos \theta)^2 - \frac{m^2}{\gamma^2} \right]}$$

Quindi la distribuzione statistica si trasforma come:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial p \partial \Omega} = \frac{1}{J} \frac{\partial^3 f}{\partial p^* \partial \Omega^*}$$

Per esempio, una distribuzione isotropa nel CM, nel caso particolare di una particella a massa nulla con momento fissato come per un decadimento in 2 corpi, diventa nel LAB:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial p \partial \Omega} = \frac{1}{J} \frac{\partial^3 f}{\partial p^* \partial \Omega^*} = \frac{1}{J} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{p}_0^*|^2} \underbrace{\delta(|\mathbf{p}^*| - |\mathbf{p}_0^*|)}_{\frac{\partial^3 f}{\partial p^* \partial \Omega^*}}$$

Si osservi come la distribuzione nel CM debba essere espressa in forma completa, senza escludere la parte nel modulo di \mathbf{p} . Si puo' verificare che la distribuzione cosi' definita e' effettivamente normalizzata a 1: infatti

$$\begin{aligned} & \int_{\text{tutto lo spazio degli impulsi}} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{p_0^{*2}} \delta(p^* - p_0^*) d^3 p^* \\ &= \int \frac{1}{4\pi} \frac{1}{p_0^{*2}} \delta(p^* - p_0^*) p^{*2} dp^* d\Omega^* \\ &= \frac{1}{p_0^{*2}} \int \delta(p^* - p_0^*) p^{*2} dp^* = 1 \end{aligned}$$

Nel caso particolare considerato abbiamo

$$p^* = \gamma \sqrt{(E - p\beta \cos \theta)^2 - \frac{m^2}{\gamma^2}} = \gamma (E - p\beta \cos \theta)$$

$$\rightarrow \delta(p^* - p_0^*) = \delta[\gamma (E - p\beta \cos \theta) - p_0^*]$$

$$E = p$$

$$\gamma (p - p\beta \cos \theta) = p_0^* \rightarrow p = \frac{p_0^*}{\gamma (1 - \beta \cos \theta)}$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial p} \right|_{p = \text{zero di } F} = \gamma (1 - \beta \cos \theta)$$

$$\delta(p^* - p_0^*) = \delta[\gamma (E - p\beta \cos \theta) - p_0^*]$$

$$= \delta \left[p - \frac{p_0^*}{\gamma (1 - \beta \cos \theta)} \right] \frac{1}{\gamma (1 - \beta \cos \theta)}$$

$$\rightarrow J = \frac{p^2 (p - p\beta \cos \theta)}{\gamma p \left[(p - p\beta \cos \theta)^2 - \frac{m^2}{\gamma^2} \right]} = \frac{p^3 (1 - \beta \cos \theta)}{\gamma p^3 (1 - \beta \cos \theta)^2}$$

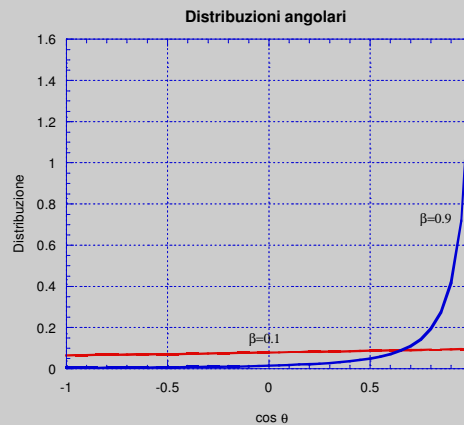
$$\rightarrow J = \frac{1}{\gamma (1 - \beta \cos \theta)}$$

Quindi la distribuzione completa nel LAB e':

$$\frac{\partial^3 f}{\partial p \partial \Omega} = \frac{1}{J} \frac{\partial^3 f}{\partial p^* \partial \Omega^*} = \frac{1}{4\pi p_0^{*2}} \delta \left[p - \frac{p_0^*}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)} \right]$$

Volendo la distribuzione angolare, integrata su tutti i valori dell'impulso, troviamo:

$$\frac{\partial f}{\partial \Omega} = \int_0^\infty \frac{1}{4\pi p_0^{*2}} \delta \left[p - \frac{p_0^*}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)} \right] p^2 dp = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2}$$



Il grafico mostra la distribuzione angolare in 2 casi, con β piccolo (0.1) e grande (0.9): come si vede, l'effetto relativistico consiste nel concentrare la distribuzione a piccoli angoli in avanti.

Come si vede, la legge di trasformazione per le distribuzioni statistiche delle componenti dell'impulso, come la sezione d'urto differenziale, risulta in genere relativamente complicata: questo avviene, evidentemente, perché le componenti stesse non sono invarianti di Lorentz. Si è quindi portati ad esprimere le distribuzioni stesse in funzioni di quantità invarianti, ottenendo così sezioni d'urto differenziali, di tutti i tipi, che sono invarianti esse stesse. Si consideri a titolo di esempio la sezione d'urto differenziale:

$$d\Omega = 2\pi d(\cos \theta) \rightarrow \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \frac{d(\cos \theta)}{dt}$$

Quindi, possiamo esprimere formalmente la sezione d'urto differenziale in termini di una sezione d'urto invariante (si noti che quest'ultima è effettivamente il rapporto fra due invarianti, $d\sigma$ e dt), e viceversa. Si trova:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{d\sigma}{dt} \frac{\lambda(s, m_1^2, m_2^2) \lambda(s, m_3^2, m_4^2)}{4\pi s}$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{\pi}{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|} \left(1 + \frac{E_1}{m_2} - \cos\theta_3 \frac{E_3}{m_2} \frac{|\mathbf{p}_1|}{|\mathbf{p}_3|} \right)$$

Misura di una sezione d'urto

Puo' forse essere interessante dare un'idea di come venga concretamente misurata una sezione d'urto in un esperimento.

1. Facciamo riferimento, inizialmente, alla definizione classica della sezione d'urto totale: essa si basa, come si e' visto, sull' attenuazione subita dall'intensita' del fascio incidente, dovuta alle interazioni con il bersaglio. Quel che troveremo si adattera' quindi al caso di un esperimento a bersaglio fisso. Come si era visto:

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = -\sigma n dx \rightarrow \Phi(x) = \Phi_0 e^{-\sigma n x}$$

in cui n e' la densita' volumetrica di centri diffusori (nuclei/cm³, p. esempio). Essa si esprime come:

$$n = \frac{\rho}{A} N_A$$

in cui ρ e' la densita' di massa, A e' la massa atomica e N_A il numero di Avogadro; nel caso di bersagli che non siano elementi puri (composti o miscele) occorre evidentemente prendere le opportune medie sui costituenti.

2. Un primo modo di misurare la sez. d'urto totale e' con il metodo assorbitivo: si misura cioe' la frazione di fascio che esce intatta dal bersaglio per diversi spessori:

$$\begin{aligned}\Phi(x_1) &= \Phi_0 e^{-\sigma n x_1} \\ \Phi(x_2) &= \Phi_0 e^{-\sigma n x_2} \\ \rightarrow \frac{\Phi(x_1)}{\Phi(x_2)} &= e^{-\sigma n (x_1 - x_2)} \\ \rightarrow -\ln\left(\frac{\Phi(x_1)}{\Phi(x_2)}\right) &= \sigma n (x_1 - x_2) \rightarrow \sigma = -\ln\left(\frac{\Phi(x_1)}{\Phi(x_2)}\right) \frac{\rho N_A}{A(x_1 - x_2)}\end{aligned}$$

La misura dipende in modo cruciale dalla misura dei due flussi, che possiamo immaginare integrati su un dato periodo di tempo: in questo modo, siamo ricondotti al conteggio di 2 numeri di particelle di fascio:

$$\sigma = -\ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right) \frac{\rho N_A}{A(x_1 - x_2)}$$

La dipendenza dal logaritmo del rapporto indica che la misura non è particolarmente sensibile. L'errore statistico su σ è dato, nell'approssimazione in cui dominano gli errori di conteggio (Poissoniani), da:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma &= \frac{\rho N_A}{A(x_1 - x_2)} \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}} \approx \frac{\rho N_A}{A|x_1 - x_2|} \frac{1}{\sqrt{N_2}} \quad \text{se } N_1 \gg N_2 \\ \frac{\Delta\sigma}{\sigma} &\approx \frac{1}{\sqrt{N_2} \ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}\end{aligned}$$

Dal punto di vista degli errori sistematici, a parte l'ovvia necessità di conoscere accuratamente lo spessore efficace del bersaglio, oltre che la sua densità e composizione chimica, si può osservare che occorre particolare cura nel determinare che i flussi misurati siano il più possibile liberi da contaminazioni di particelle spurie (fondi, prodotti da interazioni che vengono scambiati per particelle non interagenti) e che l'efficienza di conteggio sia identica per tutti gli spessori utilizzati. Inoltre, va sottolineato come con questo metodo si presti alla misura della sezione d'urto totale, ma non di quella differenziale.

3. Un secondo metodo fa uso dell'altra relazione

$$\frac{d\dot{n}}{d\Omega} = \Phi \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

che definisce la sezione d'urto differenziale. Anche in questo caso si può fare riferimento alle quantità integrate sul tempo di esposizione:

$$\frac{dn}{d\Omega} = \Delta\Phi \frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dn}{d\Omega} \frac{1}{\Delta\Phi}$$

Di fatto, anche la misura del rate differenziale viene fatta su angoli solidi finiti, quindi si ha piuttosto la relazione

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \frac{\delta n}{\delta\Omega} \frac{1}{\Delta\Phi}$$

Anche in questo caso, come si vede, la misura è ricondotta a quella del numero di eventi osservati entro ogni elemento di angolo solido, oltre che di quella del flusso integrato. In generale, non è detto che quella che si vuole misurare sia proprio la sezione d'urto differenziale in angolo: capita che, caso per caso, sia conveniente considerare la sezione d'urto differenziale in altre quantità (4-impulso trasferito, energia trasferita, o anche un insieme di diverse grandezze): in questo caso l'elemento di angolo solido $\delta\Omega$ deve pensarsi sostituito dall'elemento di spazio delle fasi per lo stato finale, ridotto alle quantità di interesse, che possiamo indicare con il simbolo generico $\delta\tau$. Il conteggio del numero di eventi per ogni elemento $\delta\tau$ è l'operazione chiave di tutto l'esperimento: essa consiste nel collezionare dati sugli eventi prodotti, tali da consentire di *identificarli* (ossia accertarsi che si tratti proprio del tipo di evento che si vuole studiare, in mezzo alla moltitudine di eventi di tutti i tipi che vengono prodotti nell'esposizione), e *misurarli* (ossia, ricostruire impulsi e masse di tutte o parte delle particelle che sono prodotte nell'evento), a partire dai dati di trigger e misura forniti dal rivelatore). Nel compiere queste operazioni, occorre sempre tener dietro alle varie *inefficienze* presenti nei vari passi di analisi, così come agli inevitabili *fondi* che finiranno per contaminare il campione selezionato.

Vale la pena di riesprimere la sezione d'urto differenziale esplicitando il flusso integrato:

$$\frac{d\sigma}{d\tau} \simeq \frac{\delta n}{\delta\tau} \frac{1}{\Delta\Phi}$$

$$\Delta\Phi = \mathcal{L} \text{ no. particelle incidenti/unità di superficie}$$

$$\rightarrow \mathcal{L} = Nnx = N \frac{\rho}{A} N_A x \quad N = \text{no. totale particelle inviate sul bersaglio}$$

$$\rightarrow \frac{d\sigma}{d\tau} \simeq \frac{\delta n}{\delta\tau} \frac{A}{N\rho N_A x}$$

La quantità \mathcal{L} è nota come *luminosità integrata*, o *esposizione*, dell'esperimento, con dimensione $[\text{area}^{-2}]$ e dipende come si vede sia dal numero totale di proiettili inviati, sia dalle caratteristiche geometriche e chimiche del bersaglio. Essa è una caratteristica dell'esposizione, e non dipende né dal rivelatore né dall'interazione che determina la sezione d'urto; essa può essere scritta come:

$$\mathcal{L} = Nnx = N \frac{\rho}{A} N_A x = \int_0^{T_{\text{esposizione}}} \frac{d\mathcal{L}}{dt} dt$$

dove $d\mathcal{L}/dt$ si chiama *luminosità istantanea*, e ha dimensione $[\text{area}^{-2}][\text{tempo}^{-1}]$.

Per quanto sia definita in modo quanto mai semplice e intuitivo, la luminosità di un esperimento non è mai molto facile da determinare: le difficoltà hanno a che fare con la determinazione del *flusso integrato* effettivo sul bersaglio, e con quella del *volume fiduciale* nella targhetta. A titolo di esempio, si possono considerare gli errori, statistici e sistematici, sul numero totale di particelle effettivamente inviate sul bersaglio, e gli effetti di *accettazione* ed *efficienza* sugli eventi prodotti (se l'esperimento non può vedere tutti gli eventi prodotti nell'elemento di spazio delle fasi $\delta\tau$, ma solo una frazione, il numero di eventi osservati deve essere corretto per questa inefficienza). Mentre queste si devono considerare come caratteristiche dell'esperimento, e non dell'esposizione in sé e per sé, considerazioni di varia natura portano di solito ad eliminare dal conteggio famiglie di eventi provenienti da zone del bersaglio o periodi particolari di raccolta dati che risultano in una bassa efficienza di rivelazione, il che riduce il flusso incidente e il volume di targhetta effettivamente utilizzati. Il volume che rimane dopo queste selezioni è più piccolo di quello geometrico, e si chiama appunto volume fiduciale: è su di esso che dobbiamo basare il computo della luminosità dell'esperimento.

Il concetto di *luminosità istantanea ed integrata*, si estende al caso di esperimenti a macchine in collisione, anche se in questo caso non è possibile esprimerla come fatto sopra per esperimenti a bersaglio fisso. Piuttosto, la luminosità potrà esprimersi in funzione delle correnti di fascio nella macchina, e delle dimensioni geometriche dei fasci: in questo modo, essa può spesso essere ottenuta indirettamente da misure sulla geometria dei fasci; venendo da sistemi di misura propri dell'acceleratore, che non sono sotto il diretto controllo dell'esperimento, esse sono tuttavia talvolta soggette a notevoli incertezze sistematiche. È quindi prassi abbastanza comune quella di utilizzare una o più *reazioni campione*, di sezione d'urto ben nota, come misura della luminosità. In parole povere, si

opera secondo il seguente schema, avendo per semplicità omesso i fattori che correggono per accettazione ed efficienza:

$$\dot{n}_{\text{reazione campione}} = \sigma_{\text{reazione campione}} \frac{d\mathcal{L}}{dt} \rightarrow \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\dot{n}_{\text{reazione campione}}}{\sigma_{\text{reazione campione}}}$$

$$\rightarrow \sigma_{\text{reazione studiata}} = \dot{n}_{\text{reazione studiata}} \frac{1}{\frac{d\mathcal{L}}{dt}} = \frac{\sigma_{\text{reazione campione}}}{\dot{n}_{\text{reazione campione}}} \dot{n}_{\text{reazione studiata}}$$

Condizione necessaria all'utilizzo di questa tecnica è, oltre alla conoscenza dettagliata della sezione d'urto del processo campione, quella della conoscenza accurata dell'accettazione ed efficienza per le reazioni, studiata e campione, (per la riduzione delle sistematiche), e quella di avere un rate decente di eventi campione (per la riduzione degli errori statistici). Come reazione campione si usa di spesso lo scattering elastico, la cui sezione d'urto differenziale a piccoli angoli è di solito abbastanza ben nota: ma anche su questo punto la realtà sperimentale si rivela in pratica più complicata di quel che ci si può aspettare. Si può notare come anche in questo caso si finisca per essere condotti a una misura consistente nel conteggio di eventi....

Riferimenti:

Landau-Lifshits, *Teoria dei campi (II edizione rivista)*, Cap II

Hagedorn, *Relativistic Kinematics*

PDG, *Review of Particle Properties*, sezione dedicata alla cinematica