Università di Torino – Dottorato in Fisica

Seconda prova scritta

27 Ottobre 2003

I candidati svolgano 4 esercizi a scelta tra quelli proposti.

E1. Si consideri un sistema in equilibrio termodinamico formato da n_A grammomolecole del gas perfetto A e da n_B grammomolecole del gas perfetto B, contenute in una scatola di volume V e separate da un setto mobile e conduttore di calore, così da avere in tutta la scatola la stessa temperatura e la stessa pressione.

- Calcolare la variazione di entropia ΔS quando si rimuove il setto separatore senza compiere lavoro, nei due casi seguenti:
  a) A e B sono lo stesso gas;
  b) i due gas sono diversi.
- Intepretare il risultato dal punto di vista microscopico.

E2. Calcolare i livelli energetici quantistici di una particella di massa m e carica q obbligata a muoversi su una circonferenza di raggio R, concatenata con un flusso magnetico Φ_B.

E3. Un oscillatore armonico quantistico unidimensionale all'istante $t = 0$ si trova con certezza in un punto di coordinata x_0. Dimostrare:

- che dopo un periodo T, l'oscillatore si trova di nuovo con certezza nel punto x_0;
- che dopo un semiperiodo $T/2$ l'oscillatore si trova con certezza nello stesso punto in cui si troverebbe classicamente.

E4. L'analisi dimensionale consente talvolta di determinare la forma funzionale di una legge fisica senza dover ricorrere al calcolo esplicito. Si determini per questa via:

- L'energia interna di un corpo nero in funzione della temperatura e del volume;
- Il numero di microstati di un gas di bosoni liberi in funzione dell'energia e del volume.
- La vita media del muone in funzione della costante di Fermi e della massa del muone. Si può applicare una formula analoga anche al caso del leptone τ?

E5. Risolvere i due seguenti punti:

a) Denotando con Γ_μ il vertice $e^+e^-\gamma$ in QED, mostrare esplicitamente che all'ordine di Born vale l'identità:

$$\bar{u}(p)\Gamma_\mu u(q)k^\mu = 0, \qquad k = p - q$$

b) Spiegare, giustificandolo brevemente, che cosa succede agli ordini perturbativi superiori.

E6. Denotando con $\Pi_{\mu\nu}$ la polarizzazione del vuoto in QED:

a) dimostrare che da principi generali segue:

$$\Pi_{\mu\nu} = \Pi_0(p^2\delta\mu\nu - p_\mu p_\nu)$$

b) dimostrare che $\Pi_0(p^2)$ è regolare in $p^2 = 0$.

E7. Data una varietà bidimensionale con metrica definita da:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

con $y > 0$ and $x \in \mathbf{R}$, derivare l'equazione delle geodetiche (preferibilmente con il principio variazionale).

E8. Si consideri l'Hamiltoniana (in una dimensione) di un sistema di fermioni interagenti di spin 1/2 confinati in una buca di potenziale infinita di larghezza L:

$$\hat{H} = \sum_{k,s} \epsilon_{k,s}\hat{a}^\dagger_{k,s}\hat{a}_{k,s} + \frac{1}{2}\sum_{kk'q,ss'} V(q)\hat{a}^\dagger_{k+q,s}\hat{a}^\dagger_{k'-q,s'}\hat{a}_{k',s'}\hat{a}_{k,s}$$

dove $\epsilon_{k,s} = \hbar^2k^2/(2m)$ sia per $s = 1/2$ che per $s = -1/2$.

a) Nel caso non interagente ($V(q) = 0$) si calcoli l'energia totale del sistema in funzione della densità $n = N/L$ ($N \gg 1$ è il numero totale di fermioni) per i seguenti casi:

- uno stato ferromagnetico (con tutti gli spin $s = 1/2$)
- uno stato paramagnetico (con metà degli spin $s = 1/2$ e metà degli spin $s = -1/2$)

b) (FACOLTATIVO) Nel caso interagente si calcoli il valor medio dell'energia al prim'ordine perturbativo per una interazione di contatto $V(r) = \sqrt{2\pi}G\delta(r)$ (la cui trasformata di Fourier è: $V(q) = G > 0$), sia per lo stato ferromagnetico sia lo stato paramagnetico.