

## **PROVE di Ammissione**

1<sup>a</sup> PROVA SCRITTA:

Cultura Generale di Base

**BUSTA 2**

### **Descrizione della Prova**

I candidati dovranno svolgere gli esercizi elencati nelle pagine seguenti che possono essere articolati in punti successivi. Nel loro elaborato i candidati dovranno elencare il numero dell'esercizio ed il punto a cui man mano si rivolgono. Si consiglia di scrivere ordinatamente e di seguire l'ordine proposto che indica un percorso guidato verso la soluzione.

## **1 Esercizi Lunghi**

### **1.0.1 Esercizio: Oscillatore in Campo elettrico costante**

Si consideri il seguente problema di meccanica quantistica bidimensionale. Una particella di massa  $m$  e carica elettrica  $e$  si trova immersa in un potenziale:

$$V(\mathbf{r}) = k(\vec{\mathbf{r}}^2) \quad ; \quad k = \text{cost} \quad (1)$$

Vi è inoltre un campo elettrico costante diretto lungo l'asse  $x$ , cioè:  $\vec{\mathbf{E}} = (E, 0)$ .

- 1) Si scriva l'hamiltoniana del sistema quantistico che abbiamo descritto.
- 2) Si trovi una semplice trasformazione di variabili che permette di risolvere esattamente il problema e si calcoli lo spettro completo dei livelli energetici specificandone, livello per livello la degenerazione.
- 3) Utilizzando esclusivamente gli stati corrispondenti ai primi due livelli energetici del sistema si costruisca uno stato misto  $\Psi$ , ma normalizzato, tale che rispetto ad esso il valore d'aspettazione dell'operatore posizione sia:

$$\langle \Psi | \vec{\mathbf{r}} | \Psi \rangle = \vec{\mathbf{r}}_0 \quad (2)$$

un vettore assegnato  $\vec{\mathbf{r}}_0$ . Rispondere alla seguente domanda: qual'è la massima distanza  $\max|\mathbf{r}_0|$  che questo valor medio può raggiungere con una simile combinazione di stati?

### 1.0.2 Plasma. Potenziale Tagliato di Yukawa

Un plasma è costituito di ioni (carica  $+q$ ) e di elettroni (carica  $-q$ ).

In un punto M alla distanza  $r$  da uno ione O, preso come origine delle coordinate, chiamiamo  $V(r)$  il potenziale elettrostatico. Consideriamo il caso in cui le densità in volume delle cariche positive e negative abbiano la seguente forma particolare:

$$\rho_+ = \rho_0 e^{-aV(r)}$$

e

$$\rho_- = -\rho_0 e^{+aV(r)}$$

dove  $\rho_0$  e  $a$  sono delle costanti ad una certa temperatura.

Domande:

- 1) Ad alte temperature, corrispondenti alla fusione termonucleare controllata si ha:

$$aV(r) \ll 1$$

- a) Dimostrare che in queste condizioni, effettuando il cambio di variabile  $u = rV(r)$ , si ha:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\lambda r}$$

(potenziale di Yukawa), dove  $\lambda$  è una funzione di  $\rho_0$  e di  $a$ .

- b) Dedurre le densità in volume  $\rho(r)$  delle cariche in M.

- 2) Dedurre:

- a) Il campo elettrico  $E(r)$  nel punto M.

b) la carica  $Q(r)$  contenuta in una sfera di centro  $O$  e di raggio  $r$ . Considerare in particolare i casi in cui  $r \rightarrow 0$  ed  $r \rightarrow \infty$ . Che conclusioni si possono trarre da questi risultati?

- 3) Calcolare la densità di carica radiale

$$\frac{dQ}{dr}$$

. Dimostrare che  $c'$  è un massimo di cariche negative alla distanza  $r = 1/\lambda$  dallo ione O.

N.B. Si ricorda che il Laplaciano di  $V(r)$ , in coordinate sferiche, è:

$$\Delta V(r) = \frac{d^2(rV)}{r dr^2}$$

## 2 Esercizi Corti

### 2.0.3 Esercizio

Calcolare le velocità di fase e di gruppo per un'onda piana data dall'espressione

$$\psi(x, t) = \exp \left[ i \left[ kx - (k^2 c^2 + m^2 c^4 / \hbar^2)^{1/2} t \right] \right] \quad (3)$$

### 2.0.4 Esercizio

Una particella di carica  $q$  viaggia con velocità  $v$  parallela a un filo, che porta una densità di carica uniforme  $\lambda$ . Nel filo passa anche una corrente  $I$ . Quale deve essere la velocità della particella per viaggiare in linea retta parallelamente al filo?

### 2.0.5 Esercizio

Protoni di altissima energia provenienti per esempio da esplosioni di supernovae possono interagire con la radiazione cosmica di fondo (radiazione fossile corrispondente a quella di un corpo nero alla temperatura di  $2.7 \text{ Kelvin}$ ) e dare luogo alla reazione



Valutare la lunghezza d'onda dei fotoni e poi calcolare qual'è, approssimativamente, la minima energia che il protone deve avere perché la reazione possa avvenire.

Costanti:

$$k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ joule/Kelvin} \quad (5)$$

$$m_p \simeq 938 \text{ MeV} \quad (5)$$

$$m_\pi \approx 134 \text{ MeV} \quad (6)$$

### 2.0.6 Studio del riscaldamento di una palla di piombo bloccata, nel suo movimento, da un ostacolo

Una palla di piombo, in moto con una velocità  $\mathbf{v}$ , urta un ostacolo; si supponga che l'ostacolo non subisca deformazioni né variazioni di temperatura e che tutta l'energia cinetica del proiettile si ritrovi sotto forma di calore nella massa di piombo.

Domande:

- 1) Stabilire la relazione tra la temperatura del piombo e la velocità  $\mathbf{v}$  quando questa temperatura rimane inferiore alla temperatura di fusione del piombo.

- 2) Calcolare quale deve essere la velocità  $v_1$  del proiettile perchè la temperatura del piombo sia uguale alla sua temperatura di fusione.
- 3) Calcolare quale deve essere la velocità  $v_2$  del proiettile perchè tutto il piombo passi allo stato liquido.
- 4) Stabilire la relazione tra la temperatura del piombo e la velocità  $v$  quando tutto il piombo è passato allo stato liquido.

Dati numerici:

- Temperatura iniziale del proiettile:  $15 \text{ } ^\circ\text{C}$
- Temperatura di fusione del piombo:  $327 \text{ } ^\circ\text{C}$
- Calore specifico del piombo solido:  $0,031 \text{ cal. g}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$
- Calore specifico del piombo liquido:  $0,034 \text{ cal. g}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$
- Calore di fusione del piombo:  $5,37 \text{ cal. g}^{-1}$
- J (equivalente meccanico della caloria) = 4,18 joules per caloria