Risolvere fino a un massimo di tre problemi nella lista seguente avendo cura di selezionare al più un problema per classe.

Classe A

A1 Considerare due teorie di gauge con fermioni, QED e QCD (SU(n)). Considerare il vertice ad un loop fermionico con tre bosoni di gauge, dimostrare che e' nullo in QED e dare il risultato in SU(n). Traccia: utilizzare le proprieta' della matrice coniugazione carica.

A2 Data la Lagrangiana

$$L = -\mathrm{Tr}\, \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi^\dagger - V \tag{1}$$

scrivere esempi di V tali che esista invarianza per $U_L(2) \otimes U_R(2)$, cioe' per

$$\phi \to U_L \, \phi \, U_R^\dagger . \tag{2}$$

Posto

$$\phi = \frac{1}{2} (\sigma + i \, \eta) + \frac{1}{2} (\vec{\alpha} + i \, \vec{\pi}) \cdot \vec{\tau} \tag{3}$$

ed assunto un potenziale tale che

$$< \sigma > = f, \qquad \sigma = f + s, \tag{4}$$

determinare quanti bosoni di Goldstone ci sono nella teoria e determinare lo spettro di massa.

Classe B

B1 Il sistema formato da una particella carica in un campo magnetico costante è ovviamente invariante per traslazioni, ma la Lagrangiana che lo descrive

$$L = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} \ , \quad \vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{d\,t} \tag{5}$$

non lo è per via del potenziale vettore. Tuttavia, parametrizzando $\vec{A}$ nella forma

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r} + \nabla f \ , \tag{6}$$

dove f è una funzione arbitraria, e limitandosi per semplicità al sistema bidimensionale nel piano ortogonale a $\vec{B}$ (scegliendo le condizioni iniziali $\vec{B} \cdot \vec{v} = 0$),

1. verificare che $\frac{\partial L}{\partial x_i}$ è una derivata totale rispetto al tempo.
2. Quindi, utilizzando la precedente informazione, costruire le costanti del moto (ad es. col teorema di Nöther) che generano le traslazioni e verificare che sono gauge invarianti.
3. Dopo aver riscritto queste quantità in termini delle coordinate lagrangiane $\vec{r}$ e dei loro momenti coniugati $\vec{p} = \frac{dL}{d\vec{v}}$ e utilizzando le parentesi di commutazione canoniche, verificare se queste leggi di conservazione valgono anche a livello quantistico.
4. Dimostrare che l'algebra dei generatori infinitesimi è isomorfa a quella di un oscillatore armonico unidimensionale.
5. Calcolare la degenerazione dei livelli energetici dovuta a questa simmetria.

B2 Ad ogni nodo i di un reticolo unidimensionale infinito è assegnata una variabile σ_i che può assumere q valori distinti. L'Hamiltoniana del sistema è

$$H = -K \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_{\sigma_i, \sigma_{i+1}} \tag{7}$$

e la corrispondente funzione di partizione canonica è $Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H}$. Scrivere le equazioni di ricorrenza del gruppo di rinormalizzazione alla Wilson, ottenute integrando per es. ogni volta sulle variabili di posto dispari. Determinare i punti fissi e discuterne la stabilità e dire in quale caso la temperatura è una variabile rilevante.

Classe C

C1 Un oscillatore quantistico unidimensionale si trovi all'istante $t_0 = 0$ con certezza nel punto x_0. Dimostrare che negki istanti

$$t_n = \frac{n}{2} T, \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{8}$$

dove T è il periodo dell'oscillatore classico, l'oscillatore quantistico si troverà con certezza nei punti previsti dalla teoria classica.

C2 L'Hamiltoniana di una particella costretta a muoversi su si un piano sia:

$$H = \frac{1}{2\,m} \Big[(p_x - \alpha\, y)^2 + p_y^2\Big], \tag{9}$$

dove α è una costante reale.

1. Trovare gli autovalori di H e discuterne la degenerazione.
2. Individuare la situazione fisica descritta da H. considerare l'Hamiltoniana

$$H' = \frac{1}{2\,m} \Big[(p_x - \frac{\alpha}{2}\, y)^2 + (p_y + \frac{\alpha}{2}\, x)^2\Big], \tag{10}$$

e discutere la realazione con H.

Classe D

D1 Data la Lagrangiana $L = L_1 + L_2$

$$L_1 = \bar{q}\,(i\,\gamma^\mu\,\partial_\mu)\,q + \frac{g}{2}\sum_{k=0}^{3}\Big[(\bar{q}\,\tau_k\,q)^2 + (i\,\bar{q}\,\gamma^5\,\tau_k\,q)^2\Big], \tag{11}$$

$$L_2 = R\Big[\det_{ij}\,(\bar{q}_i\,(1+\gamma^5)\,q_j) + \det_{ij}\,(\bar{q}_i\,(1-\gamma^5)\,q_j)\Big] \tag{12}$$

dove R, g sono costanti di accoppiamento, τ matrici di Pauli e $\bar{q} = (\bar{u}, \bar{d})$, determinare tutte le simmmetrie di L_1, L_2 e di L.

D2 Considerata la Lagrangiana $L = L_1 + L_2$

$$L_1 = \bar{q}\,(i\,\gamma^\mu\,\partial_\mu)\,q + \frac{g}{2}\sum_{k=0}^{3}\Big[(\bar{q}\,\tau_k\,q)^2 + (i\,\bar{q}\,\gamma^5\,\tau_k\,q)^2\Big], \tag{13}$$

$$L_2 = R\,\Big[\mathrm{det}_{ij}\,(\bar{q}_i\,(1+\gamma^5)\,q_j) + \mathrm{det}_{ij}\,(\bar{q}_i\,(1-\gamma^5)\,q_j)\Big] \tag{14}$$

dove R, g sono costanti di accoppiamento, τ matrici di Pauli e $\bar{q} = (\bar{u}, \bar{d})$, studiare le equazioni del moto in approssimazione di campo medio e descrivere il condensato dei fermioni.