

Cromodinamica

1. Introduzione

L'evidenza sperimentale, debitamente interpretata, porta dunque alle seguenti conclusioni:

- Il fenomeno dello *scaling* (approssimato) delle funzioni di struttura misurate negli esperimenti di *deep inelastic scattering* di elettroni e muoni (e, in realta', anche di neutrini) puo' venire interpretato nella maniera piu' semplice con il *modello a partoni*, in cui si ipotizza l'esistenza nel nucleone (e, per estensione, in qualsiasi adrone) di costituenti, apparentemente puntiformi e sostanzialmente liberi (come un gas entro un recipiente), i *partoni* appunto
- I dati spettroscopici su numeri quantici, masse, larghezze e modi di decadimento delle centinaia di adroni osservati portano ad ipotizzare che gli adroni siano costituiti da *quark*, particelle elementari a spin $\frac{1}{2}$, che sono legati in stati $q\bar{q}$ (mesoni) o qqq (barioni). Nel tempo, si individuano 6 tipi diversi, o *flavor*, di quark, con molte proprieta' relativamente simili. Questa evidenza resta tuttavia indiretta, perche' risulta impossibile osservare un quark libero: tutto appare come se i quark fossero legati da forze estremamente intense all'interno degli adroni

Non c'e' bisogno di sottolineare come queste conclusioni siano al tempo stesso in accordo (sul fatto che gli adroni siano stati legati di costituenti elementari) e in forte disaccordo (sul fatto che i costituenti si comportino come particelle libere o fortemente legate). Quello di cui c'e' bisogno, a questo punto, e' una teoria che sia in grado di inquadrare questo complesso di fenomeni in una descrizione unificata e internamente coerente: questa teoria, formulata all'inizio degli anni '70 e finora trovata sempre in accordo con i dati sperimentali *nei casi in cui il confronto e' possibile*, e' una teoria di campo, costruita sul modello dell'elettrodinamica quantistica (*QED*), alla quale assomiglia non poco pur con alcune fondamentali differenze, e si chiama *cromodinamica quantistica (QCD)*

2. Ipotesi e prove sperimentali del colore: un nuovo grado di liberta' per i quark

La *QCD* e' fondata sull'ipotesi che esista un nuovo numero quantico per i quark, chiamato *colore*. Esso venne inizialmente proposto per risolvere alcuni problemi di natura fondamentale; successivamente si riconobbe che esso in realta' rappresentava, al pari della carica elettrica, la sorgente di un nuovo campo di forza,

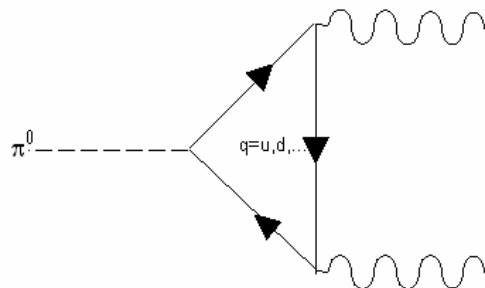
appunto il *campo di colore*, oggi considerato una delle interazioni fondamentali fra i costituenti.

a) Il modello a quark e il problema della statistica

Per quanto successo incontri nello spiegare molte delle proprietà degli adroni, il modello a quark soffre di un problema fondamentale: come si è visto, tutto concorda con l'indicare che la funzione d'onda complessiva di un barione (spaziale, spin, flavor) sia simmetrica per scambio di 2 quark qualsiasi. Essendo i quark fermioni, questo sembra violare il teorema spin-statistica, alla cui validità per altro si crede fermamente, essendo esso fondato su ipotesi molto generali che stanno alla base di qualunque teoria di campo, e senza le quali non si saprebbe in realtà costruire nessuna teoria sensata. Per ovviare a questo problema, fu suggerito da Greenberg e altri, pochi anni dopo l'introduzione del modello a quark, che i quark stessi avessero un ulteriore grado di libertà, analogo alla carica elettrica ma un po' più complicato: gli stati totalmente simmetrici negli altri gradi di libertà sarebbero completamente antisimmetrici nella nuova variabile, salvando così il principio di Pauli.

b) Il branching ratio del π^0

Si consideri il decadimento del π^0 in 2 γ : esso è rappresentato all'ordine più basso dal diagramma



nel quale compare una somma su tutti i tipi di quark, e dove bisogna anche considerare il diagramma con gli indici dei fotoni scambiati (statistica di Bose).

Originariamente, il calcolo della larghezza di decadimento venne fatto nel 1949 da Steinberger, utilizzando il diagramma mostrato sopra, nel quale solo protoni virtuali circolano nel loop. Il rate determinato in questo modo si può scrivere

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{\alpha^2 m_\pi^3}{64\pi^3 f_\pi^2}$$

dove la costante f_π , legata alla funzione d'onda del pione, può essere determinata dal decadimento del pione carico e vale circa 93 MeV. L'accordo fra teoria ed esperimento è buono:

$$\begin{aligned}\Gamma_{teo} &= 7.63 \text{ eV} \\ \Gamma_{esp} &= 7.37 \pm 1.5 \text{ eV}\end{aligned}$$

Nell'ambito del modello a quark, nel loop circolano tutti i tipi di quark, ma quelli dominanti sono quelli a massa più piccola, u, d, s : essi compaiono nell'espressione della *corrente assiale* che circola nel loop

$$J_{(A)}^\mu \approx \sum_{i=u,d,s} \bar{\psi}_i \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau_3^i}{2} \psi_i$$

tenuto conto della relazione fra carica e 3° componente dell'isospin, l'ampiezza calcolata originariamente viene ad essere modificata con il fattore

$$\sum_{i=u,d,s} \tau_3^i Q_i^2 = 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 0 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

e si ha per il rate:

$$\Gamma_{quark}(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{\alpha^2}{64\pi^3} \frac{m_\pi^3}{f_\pi^2} \sum_i g_A^{(i)} e_i^2 = \frac{1}{9} \Gamma_{protone}(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$$

Questo calcolo fornisce quindi un valore che è 9 volte più piccolo del valore sperimentale. Se però ci sono 3 colori di quark u , e altrettanti di quark d e s , l'ampiezza risulta moltiplicata per 3, e il rate per 9. Questa è dunque un'altra buona indicazione che l'ipotesi del colore ha qualcosa a che fare con la realtà.

La storia del calcolo del rate di decadimento per il π^0 è in realtà notevolmente più intricata, e interessante, di quanto descritto sommariamente sopra: all'interno dei modelli ad algebra delle correnti, Sutherland e Veltman trovarono che il termine dominante dell'ampiezza di decadimento doveva essere nullo, in evidente contrasto con il dato sperimentale; questo condusse poi Bell, Jackiw

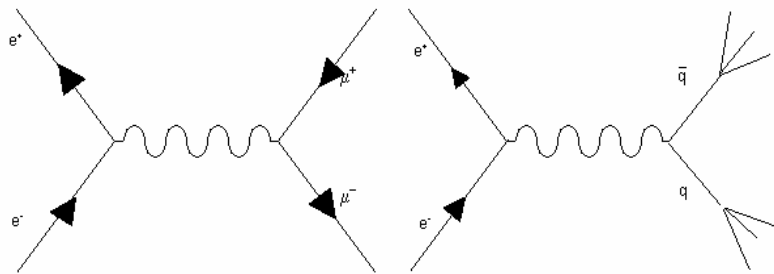
e Adler a scoprire il primo esempio di *anomalia* in una teoria di campo perturbativa. La presenza di anomalie conduce alla rottura di simmetrie presenti nella versione classica del modello, in questo caso della *simmetria chirale*: in sostanza, il modello classico e' simmetrico, ma la quantizzazione rompe inaspettatamente la simmetria.

c) Il rapporto R

Uno dei risultati piu' interessanti ottenuti agli anelli di accumulazione e^+e^- riguarda l'andamento con l'energia del rapporto R

$$R(E_{CM}) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{adroni})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

L'annichilazione in stati finali contenenti, rispettivamente, coppie di μ e adroni, procede attraverso i diagrammi a 1 fotone:



La sezione d'urto totale per l'annichilazione in una coppia fermione-antifermione che si ottiene da questi diagrammi e' data da

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

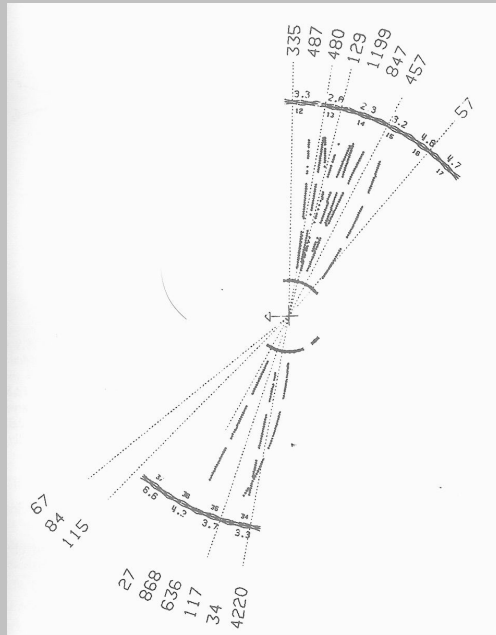
per fermioni di carica unitaria, come i μ . Allora il rapporto fra le 2 sezioni d'urto e':

$$R(E_{CM}) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{adroni})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \frac{\sum_q \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \sum_q Q_q^2$$

dove la somma e' estesa a tutti i tipi di quark che si possono produrre ad una data E_{CM} .

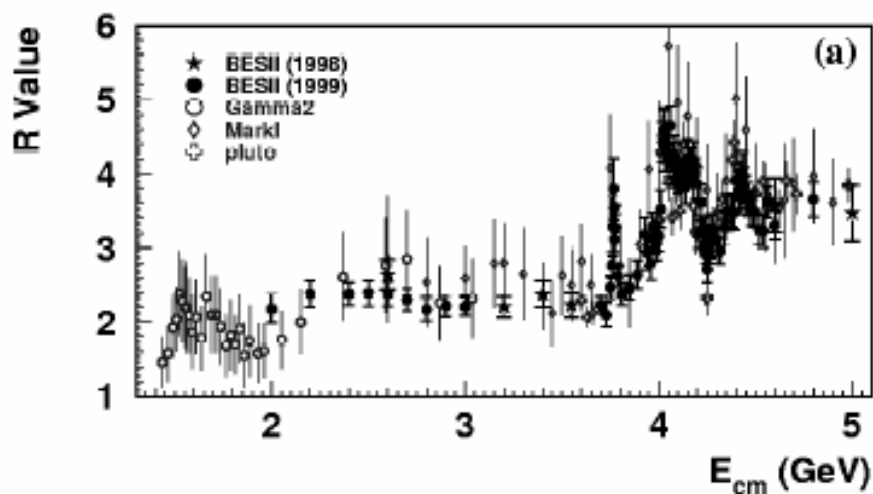
Come sappiamo, non e' possibile osservare i singoli quark prodotti nell'annichilazione, visto che sono particelle colorate; si osservano viceversa gli adroni che risultano dalla frammentazione dei quark

stessi, i quali si raggruppano, nel caso piu' semplice, in 2 jets di particelle, ognuno dei quali ha le caratteristiche cinematiche del quark da cui ha avuto origine. Un esempio tipico (e spettacolare) e' mostrato nell'evento che segue, trovato dall'esperimento JADE a PETRA (DESY), a un'energia di 30 GeV nel CM:



Fatte salve le non poche ambiguita' e difficolta' sperimentali nella ricostruzione dei jets, e' possibile da essa risalire al processo elementare di annichilazione in quark-antiquark (v. dopo)

Questo e' cio' che si osserva fra 1 e 5 GeV circa



Cio' che ci attendiamo e' un andamento a gradini, con un nuovo gradino via via che entra un nuovo tipo di quark: questo e' dovuto al semplice fatto che, ad una data energia nel CM, si possono produrre coppie di fermioni solo se $2m_f < E_{CM}$.

$$u, d \rightarrow R = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \quad \text{bassa energia}$$

$$u, d, s \rightarrow R = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{9} \quad E > 1.5 \text{ GeV}$$

$$u, d, s, c \rightarrow R = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{9} \quad E > 3 \text{ GeV}$$

I valori di R osservati sono invece diversi, anche se si vedono "scalini" in corrispondenza delle energie di transizione attese ("accensione" di un nuovo flavor). Se abbiamo 3 colori per ogni flavor, i valori diventano:

$$u, d \rightarrow R = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{15}{9} \quad \text{bassa energia}$$

$$u, d, s \rightarrow R = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{18}{9} \quad E > 1.5 \text{ GeV}$$

$$u, d, s, c \rightarrow R = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{30}{9} \quad E > 3 \text{ GeV}$$

in buon accordo con i dati sperimentali; si tenga presente che l'apertura del canale in *charm* coincide approssimativamente con l'apertura del canale in leptoni τ , che contribuiscono una carica unitaria

3. Proprieta' del colore in quanto grado di liberta' aggiuntivo per i quark

Dobbiamo richiedere al numero quantico di colore di soddisfare ad un paio di vincoli:

- deve essere possibile costruire stati a colore totale nullo per i composti $q\bar{q}, qqq$; questi saranno i soli stati fisici possibili, perche' *non c'e' evidenza di stati colorati fra barioni e mesoni*

Sarebbero diversi tipi di nucleoni, mesoni etc: l'esistenza di ulteriori gradi di liberta' per il nucleone si manifesterebbe in diversi modi, fra i quali le mutate proprieta' statistiche di insiemi di nucleoni. Se p.es. si fa riferimento alla descrizione dei livelli nucleari nel modello a shell, piuttosto ben verificata specialmente per i nuclei non troppo pesanti, il nucleo di He^4 (particella α) risulta un insieme di una coppia di neutroni in stato di singoletto di spin, e una di protoni, anch'essi in stato di singoletto, in uno stato S per cio' che riguarda il momento angolare orbitale: per aggiungere un nucleone si richiede che esso si situi su un livello energetico superiore, per non violare il principio di Pauli. Se esistessero nucleoni colorati, che fossero p.es. tripletti di colore, come i quark, nella stessa configurazione orbitale-spin del nucleo di He^4 potrebbero stare tre volte tanti nucleoni, e il nucleo di C^{12} avrebbe una struttura a livelli completamente diversa da quella osservata.

- per questi stati la parte di colore della funzione d'onda deve essere totalmente antisimmetrica per scambio di due quark; questo perche' vogliamo risolvere il problema della statistica

Queste richieste escludono che il colore possa essere un numero quantico semplice, come p.es. il numero barionico; le sue proprieta' non possono essere quelle di una quantita' semplicemente additiva. Per fare un esempio, il numero barionico puo' essere considerato, per i barioni, una quantita' con un unico possibile valore, e con il corrispondente antivalore: $B=+1$ o $B=-1$. Ora, come esistono stati con numero barionico nullo, cosi' esistono stati a colore nullo (bianchi): anzi, tutti gli stati adronici lo sono! Ma, mentre per uno stato contenente barioni e antibarioni l'unico modo di realizzare numero barionico nullo e' che $N_B = N_{\bar{B}}$, deve essere possibile realizzare uno stato bianco sia utilizzando un quark e un antiquark colorati (mesoni $q\bar{q}$), sia utilizzando 3 quark colorati (barioni qqq). Questo richiede che il numero di possibili stati del colore sia >1 ; in particolare 3 e' sufficiente.

Il colore e' dunque, per i quark, una quantita' con 3 possibili valori, che possiamo chiamare $R(ed)$, $B(lue)$, $G(reen)$; accanto ad essi ci sono 3 possibili antivalori ($anti-R$, $anti-B$, $anti-G$). Diventa quindi indispensabile chiedersi con quali regole si combina

il colore negli stati con diversi quark e antiquark: in altre parole, quale sia l'algebra del colore. Se ricordiamo la proprietà di decomposizione delle rappresentazioni prodotto di $SU(3)$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$$

$$3 \otimes 3^* = 1 \oplus 8$$

possiamo notare che in entrambe le decomposizioni in somma diretta compare un singoletto. La funzione d'onda di singoletto proveniente dalla decomposizione di $3 \otimes 3 \otimes 3$ è totalmente antisimmetrica per lo scambio di due qualsiasi dei quark componenti, quindi soddisfa la seconda proprietà richiesta; d'altra parte, per un singoletto, tutti i valori dei numeri quantici sono nulli, e lo stato è invariante per trasformazioni nello spazio del colore, quindi anche la prima proprietà richiesta è verificata.

Si può osservare che i dati sperimentali portano ad escludere altre possibilità: p.es., si potrebbe pensare che gli stati di colore dei quark realizzino la rappresentazione aggiunta, ossia **3**, di una simmetria $SU(2)$ di colore. Ma per $SU(2)$, come si ricorderà, la rappresentazione coniugata – quella degli antiquark, coincide con quella fondamentale: $2^* = 2$; questo ha come conseguenza che la rappresentazione aggiunta è reale, e come tale descrive tanto le particelle che le antiparticelle visto che gli autovalori dell'unico generatore che commuta con tutti, la 3° componente dell' "isospin di colore" I_3^c , sono simmetrici rispetto all'origine. Allora uno stato di 2 quark (un 'diquark') può trovarsi in singoletto di colore:

$$3 \otimes 3 = 1 \oplus 3 \oplus 5$$

quindi dovremmo osservare i diquark, con la loro carica elettrica frazionaria etc, comunemente come i tri-quark (barioni). Poiché questi stati non si osservano, dobbiamo concludere che il gruppo di simmetria del colore non è $SU(2)$.

Postuliamo quindi che il grado di libertà di colore per i quark soddisfi ad una simmetria $SU(3)$, analoga, ma completamente distinta da quella di flavor: indichiamo il gruppo di simmetria del colore con $SU(3)_c$. *A differenza dalla simmetria di flavor, la simmetria di colore è esatta* (non è rotta: tutti e 3 gli stati di colore di un dato quark hanno esattamente la stessa massa); come vedremo, è anche legata all'esistenza di un nuovo campo di forza.

Assumere $SU(3)_c$ come gruppo di simmetria per il colore implica che ci siano, in uno spazio astratto analogo a quello del flavor, ma da esso del tutto distinto e indipendente, 3 stati base, che vengono identificati con gli stati *R(ed)*, *B(lue)* *G(reen)*, citati sopra. Di conseguenza, lo stato di ogni quark richiede, per essere specificato, oltre ai numeri quantici orbitali, di flavor e di spin, anche un numero quantico di colore. Gli stati di colore costituiscono un'aggiunta alla parte di spin e di

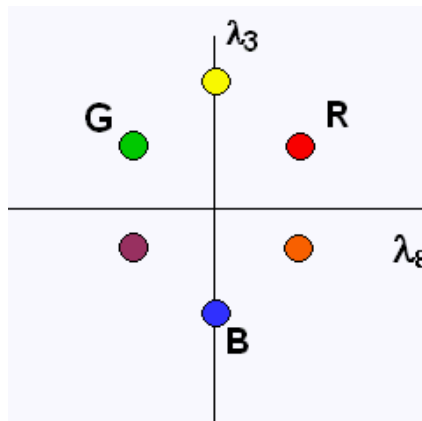
flavor della funzione d'onda, che risulta così, per ogni stato fisico, il prodotto di 4 termini:

$$\psi = \psi_{\text{colore}} \psi_{\text{orbitale}} \psi_{\text{spin}} \psi_{\text{flavor}}$$

I 3 stati basi del colore costituiscono la rappresentazione fondamentale (**3**) di $SU(3)_C$; i tre stati base di anticolore sono la rappresentazione coniugata, **3***. Essi sono autostati dei 2 operatori di colore che commutano con tutti gli altri: ricordando le proprietà delle matrici di Gell-Mann, questi operatori saranno gli analoghi di I_3 e Y in $SU(3)_F$, e avranno gli stessi autovalori. La seguente tabella ne

	I_3^c	Y^c		I_3^c	Y^c
R	$+1/2$	$+1/3$	$\bar{R}$	$-1/2$	$-1/3$
G	$-1/2$	$+1/3$	$\bar{G}$	$+1/2$	$-1/3$
B	0	$-2/3$	$\bar{B}$	0	$+2/3$

mostra i valori per gli stati di colore e anticolore delle rappresentazioni **3** e **3***.



Si ricordi che

$$I_3^c = \frac{\lambda_3}{2}, \quad Y^c = \frac{\lambda_8}{\sqrt{3}}$$

L'ipotesi che tutti gli adroni siano singoletti di colore (*confinamento del colore*: gli stati fisici non sono colorati) equivale a richiedere che in ogni adrone il valore di I_3^c e Y^c totali siano uguali a zero (stato di singoletto di colore). Essa ci dice anche come si scrive la parte di colore delle funzioni d'onda di un mesone e di un barione qualsiasi:

$$\text{mesoni: } \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \rightarrow \psi_c = \frac{1}{\sqrt{3}}(R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B})$$

$$\text{barioni: } \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10} \rightarrow \psi_c = \frac{1}{\sqrt{6}}(RGB - RBG + GBR - GRB + BRG - BGR)$$

4. L'interazione di colore

Fino a questo punto, il colore si presenta come un nuovo numero quantico per i quark, senza valenza dinamica diretta: in questo senso, gioca un ruolo abbastanza simile al flavor (v. isospin), quello cioè di una simmetria alla quale non corrisponde una particolare forma di interazione. Ci si può chiedere, d'altra parte, se non ci siano altre rappresentazioni di $SU(3)_c$ di interesse fisico, a parte il singoletto: p.es., la rappresentazione $\mathbf{8}$ compare sia nella scomposizione di $\mathbf{3} \times \mathbf{3}^*$ sia in quella di $\mathbf{3} \times \mathbf{3} \times \mathbf{3}$. Ci sono stati fisici nella rappresentazione $\mathbf{8}$ (che, ricordiamo, è la rappresentazione aggiunta, o regolare, di $SU(3)_c$)?

Una risposta completa e definitiva a questa ed altre domande viene dalla descrizione e dallo studio della QCD in quanto *teoria di gauge non abeliana*: argomento questo al di là degli scopi e dei limiti di un corso come questo. Volendo tuttavia dare un'idea minimale dell'argomento, una micro-introduzione potrebbe essere questa:

QED

La *QED* è la teoria delle interazioni fra fermioni carichi e campo elettromagnetico; si parte dalla lagrangiana dei campi coinvolti (elettrone e campo e.m.), che contiene un termine "cinetico" (ossia, di campo libero per elettrone e fotone), e un termine "di interazione"; si ricavano le equazioni del moto per i campi, si postulano le relazioni di commutazione e si arriva a descrivere perturbativamente le interazioni in termini di uno sviluppo in potenze crescenti della costante di accoppiamento, α . La procedura richiede una cura particolare nel trattamento di quantità formalmente infinite, ma fornisce risposte finite per tutte le quantità fisiche (rinormalizzazione). In questo modo, la forma dell'interazione fra cariche è imposta dall'inizio, in realtà senza alcuna giustificazione che non sia l'analogia classica.

È tuttavia possibile ricavare la *forma* dell'interazione, e di fatto *la stessa necessita' dell'esistenza e struttura del campo e.m.*, partendo dalla lagrangiana libera del campo dell'elettrone, e richiedendo una speciale simmetria: l'invarianza della lagrangiana stessa rispetto a *trasformazioni di gauge locali*. Ricordiamo l'espressione della lagrangiana libera per l'elettrone:

$$L_0 = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x)$$

Una *trasformazione di gauge globale* consiste in una trasformazione del campo dell'elettrone del tipo

$$G: \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U_\theta \psi(x) = e^{-ie\theta} \psi(x)$$

in cui θ è un parametro, *uguale in tutti i punti dello spazio tempo*. L'invarianza della lagrangiana libera rispetto a trasformazioni di fase riflette l'inosservabilità della fase assoluta degli stati del campo ψ . Come è noto, l'invarianza della lagrangiana libera per il campo dell'elettrone rispetto a una trasformazione come questa, fra le altre conseguenze, porta alla *conservazione della carica elettrica*. Come è stato osservato da molto tempo, l'invarianza rispetto a una trasformazione di gauge globale sembra tuttavia essere incompatibile con i principi della relatività ristretta: in effetti, la conservazione della carica che ne consegue non è garantita valere in modo locale (una carica +va potrebbe apparire a Roma e una -va, *simultaneamente*, apparire a Torino: ma la simultaneità di 2 eventi, come è noto, non è una proprietà assoluta...). Siccome noi vogliamo che la conservazione della carica sia garantita localmente, dobbiamo considerare trasformazioni di gauge più generali.

[In realtà, le cose sono più complicate di così: si prenda questo come un argomento di plausibilità più che di necessità...]

Una *trasformazione di gauge locale* viene rappresentata da una trasformazione del campo dell'elettrone del tipo

$$G_L: \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U_\theta \psi(x) = e^{-ie\theta(x)} \psi(x)$$

in cui $\theta(x)$ è un parametro, *funzione delle coordinate spazio-temporali*. Ora, si può mostrare facilmente che la lagrangiana libera del campo dell'elettrone *non* è invariante rispetto alle trasformazioni di questo tipo, a causa della presenza della derivata rispetto a x_μ . Tuttavia, l'aggiunta alla lagrangiana di un termine, corrispondente all'introduzione di un *campo compensatore*, restaura l'invarianza richiesta: la sostituzione del 4-gradiente con la *derivata covariante*

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu$$

rende la lagrangiana invariante rispetto alle trasformazioni accoppiate

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U_\theta \psi(x) = e^{-ie\theta(x)} \psi(x) \\ A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + e \partial_\mu \theta(x) \end{cases}$$

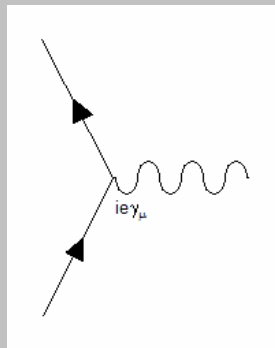
In questo modo, il nuovo campo risulta accoppiato al campo dell'elettrone dal *termine di interazione* che si aggiunge alla lagrangiana :

$$L_0 = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) \rightarrow L_0 + L_i$$

$$L_i = -\underbrace{e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)}_{j^\mu}A_\mu$$

che come si vede coincide con l'analogo termine di interazione classico fra un sistema di correnti e il campo e.m.

L'interazione elettromagnetica così definita può essere descritta perturbativamente: il vertice elementare contiene l'accoppiamento campo-cariche



che descrive in modo unificato i processi elementari dell'interazione stessa (emissione e assorbimento di fotoni da parte delle cariche "accelerate", creazione e annichilazione di coppie carica-anticarica da parte di fotoni virtuali). Un punto cruciale cui prestare attenzione è il fatto che il campo elettromagnetico così costruito è *neutro*, ossia privo di carica elettrica: quindi esso non interagisce con se stesso, essendo accoppiato solo alla carica elettrica e non ad altri numeri quantici.

Si può dunque dire che la simmetria rispetto a trasformazioni di gauge locali *richiede* l'esistenza di un campo aggiuntivo, che si identifica immediatamente con il campo e.m. Si capisce così il meccanismo con cui l'invarianza per trasformazioni locali garantisce la conservazione locale della carica elettrica: la carica stessa è accoppiata al campo e.m., che per costruzione può assorbirla o crearla solo a coppie, quindi conservandola. Esso evolve propagandosi alla velocità della luce (infatti, l'invarianza di gauge implica anche, come richiamato sopra, che il campo e.m. abbia massa nulla), e questo garantisce la covarianza relativistica. Poiché il campo elettromagnetico trasporta energia e quantità di moto (ossia, 4-impulso) occorre poi aggiungere un termine "cinetico" anche per quest'ultimo, dato da:

$$-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

in cui il 4-tensore antisimmetrico $F^{\mu\nu}$ contiene le componenti dei campi elettrico e magnetico; esso deve risultare a massa nulla per non distruggere l'invarianza di gauge. L'insieme di tutte le trasformazioni di gauge locali, il cui parametro sia proporzionale alla carica elettrica, costituisce un gruppo, che è facile da identificare: si tratta appunto di trasformazioni di fase, e il gruppo (abeliano) è il gruppo a 1 parametro chiamato $U(1)$. Come accennato sopra, le proprietà del gruppo di gauge risultano fondamentali per stabilire le caratteristiche dell'interazione.

QCD

Se consideriamo ora il campo di un quark, possiamo estendere l'idea di trasformazioni di fase locali al caso in cui le trasformazioni stesse agiscono su un campo che ha diverse componenti: nel nostro caso, si tratta di un campo (per altro verso fermionico come quello dell'elettrone) che ha 3 componenti complesse nello spazio del colore. In generale, allora, ci aspettiamo che il parametro α della trasformazione precedentemente considerata divenga, in questo caso, una *matrice* 3×3 , che agisce nello spazio del colore, e i cui elementi sono funzioni delle coordinate spazio-temporali; in altre parole, il gruppo di simmetria delle trasformazioni di gauge questa volta non sarà più $U(1)$ ma quello delle trasformazioni nello spazio del colore, ossia $SU(3)_C$.

Usiamo la seguente convenzione:

il simbolo ψ indica un 3-spinore nello spazio del colore (solito stato di colore)

il simbolo A indica una matrice di $SU(3)$, agente sugli stati di colore

il simbolo $\vec{G}$ indica un vettore a 8 componenti

Sinteticamente, una trasformazione di gauge locale per un campo fermionico colorato (quark) si potrà scrivere:

$$G_L^C : \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U_\theta \cdot \psi(x) = e^{-ig\mathbf{M}(x)} \cdot \psi(x)$$

Qual è il significato di questa espressione? Il parametro $\theta(x)$ viene sostituito da $\mathbf{M}(x)$, una *matrice di parametri* 3×3 , che opera la trasformazione di simmetria agendo sulle componenti di colore del campo; i suoi elementi sono evidentemente delle funzioni delle coordinate spazio-temporali. L'esponenziale va immaginato sviluppato in serie di Taylor:

$$e^{-ig\mathbf{M}} = \mathbf{1} - ig\mathbf{M} + \frac{(-ig\mathbf{M})^2}{2!} + \dots$$

in cui ogni termine e' una matrice unitaria 3×3 . Allora, come sappiamo, $\mathbf{M}$ e' una matrice hermitiana a traccia nulla. Allora si potra' scrivere in generale

$$\mathbf{M}(x) = \sum_{i=1}^8 \lambda_i \theta_i \equiv \vec{\lambda} \cdot \vec{\theta}(x)$$

$\vec{\theta}$ e' un vettore a 8 componenti, ognuna delle quali e' un parametro indipendente; $\vec{\lambda}$ e' il vettore le cui 8 componenti sono gli 8 generatori di $SU(3)_C$ (le matrici di Gell-Mann nello spazio del colore). In effetti, ogni matrice 3×3 , hermitiana e a traccia nulla si puo' esprimere come combinazione lineare degli 8 generatori del gruppo. Quindi $\vec{\lambda}$ e' un vettore a 8 componenti, ognuna delle quali e' una matrice 3×3 . Si vede cosi' che la trasformazione *mescola* le 3 componenti dello stato di colore, in modo indipendente in ogni punto dello spazio-tempo.

La sostituzione del 4-gradiente questa volta si scrivera':

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu \mathbf{1} + ig\mathbf{C}_\mu$$

$\mathbf{C}_\mu$: campo 4-vettoriale, matrice $\in SU(3)$ nello spazio del colore

$$\rightarrow \mathbf{C}_\mu = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^8 G_\mu^a \lambda_a \equiv \vec{G}_\mu \cdot \vec{\lambda}$$

Il campo compensatore si scrive ora come combinazione lineare di 8 campi base; ogni termine ha caratteristiche proprie per cio' che riguarda l'azione sugli stati di colore, che sono quelle della matrice λ_a appropriata; i quanti di questi campi sono i *gluoni*.

Anche per questo caso, richiedere l'invarianza della lagrangiana rispetto a trasformazioni come quella descritta porta dunque a introdurre un insieme di campi compensatori: se un solo campo, privo di carica elettrica, era necessario e sufficiente nel caso del gruppo $U(1)$, abeliano e quindi con un solo generatore, per $SU(3)_C$, che, come ricordato, e' un gruppo non abeliano con 8 generatori, saranno necessari 8 campi vettoriali, dotati di carica di colore.

[In effetti, si puo' dimostrare che per ogni dato gruppo di simmetria il campo di gauge appartiene alla *rappresentazione aggiunta*: quella di $SU(3)$, come si ricordera', e' a dimensione 8].

Quindi, complessivamente le trasformazioni di gauge locali per i campi colorati, rispetto alle quali la lagrangiana e' invariante, si scrivono:

$$\begin{cases} \Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = U_\theta \Psi(x) = e^{-ig\vec{\lambda} \cdot \vec{\theta}(x)} \Psi(x) \\ G_\mu^a(x) \rightarrow G_\mu'^a(x) = G_\mu^a(x) + \partial_\mu \theta^a + g \sum_{b,c=1}^8 f^{abc} G_\mu^b(x) \theta^c(x) \quad a=1,\dots,8 \end{cases}$$

Rispetto al caso della *QED*, si osserva la comparsa di un nuovo termine nella regola di trasformazione dei campi di gauge: esso ha origine dalle relazioni di commutazione fra i generatori del gruppo, che si possono scrivere, come si ricorderà:

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = if^{abc} \frac{\lambda_c}{2} \quad f^{abc}: \text{costanti di struttura di } SU(3)$$

Come nel caso della *QED*, la comparsa dei campi di gauge introduce un termine di interazione nella lagrangiana:

$$L_0 = \bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) \rightarrow L_0 + L_i$$

$$L_i = -g \underbrace{\left[\bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \left(\frac{\vec{\lambda}}{2} \right) \Psi(x) \right]}_{\vec{j}_\mu} \cdot \vec{G}_\mu$$

La parte di interazione in *QCD* è evidentemente la generalizzazione al caso di *SU(3)* del termine di interazione presente nel caso di *U(1)* (*QED*):

$$L_i = - \underbrace{e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)}_{j^\mu} A_\mu$$

nella quale compare la somma di 8 contributi, uno per ogni *corrente di colore*. Anche per il campo gluonico è richiesto che la massa sia nulla, per garantire l'invarianza di gauge della lagrangiana; inoltre, anche per esso dobbiamo introdurre un termine cinetico, come per il fotone, che sarà ora della forma:

$$-\frac{1}{4} \vec{G}_{\mu\nu} \cdot \vec{G}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 G_{\mu\nu}^a \cdot G_a^{\mu\nu}$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g \sum_{b,c=1}^8 f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c$$

Rispetto al termine cinetico del campo elettromagnetico, a parte l'ovvia estensione alla somma su tutte e 8 le componenti nello spazio del colore del tensore del campo gluonico, si osservi che nella definizione del tensore $G^{\mu\nu}$ stesso c'è un termine aggiuntivo, che non era presente nella definizione di $F^{\mu\nu}$ per il campo elettromagnetico: questo termine deriva dalla caratteristica non abeliana del gruppo $SU(3)_C$. Esso contiene prodotti di componenti del campo gluonico, e nel prodotto $G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$ dà luogo a termini che sono cubi e quarte potenze nelle componenti del campo. In conseguenza di questo fatto, del tutto rimarchevole, c'è una differenza sostanziale fra la dinamica del campo elettromagnetico e quella del campo gluonico: essendo quest'ultimo portatore della carica di colore, c'è interazione di colore fra i gluoni, mentre come sappiamo i fotoni non interagiscono fra loro. Se dovessimo scrivere

l'equivalente delle equazioni di Maxwell per il campo gluonico troveremmo quindi che si tratta di equazioni non lineari.

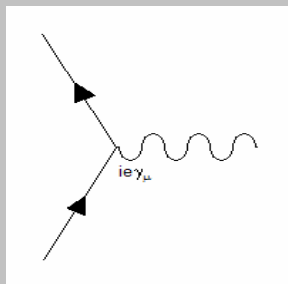
In conclusione, i vertici elementari dell'interazione sono piu' di uno; anticipando leggermente i tempi, essi possono essere identificati con gli schemi seguenti:

Il vertice elementare quark-quark-gluone

Esso e' del tutto analogo al vertice elementare in QED, che si riporta di seguito per convenienza:

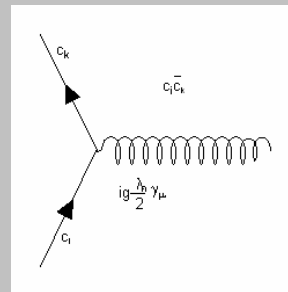
QED

$$ie\gamma_\mu$$

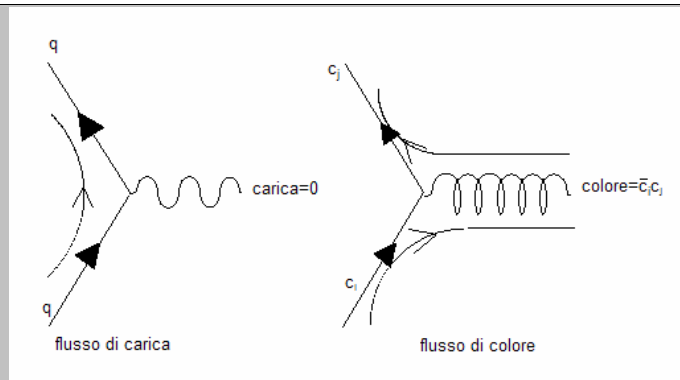


QCD

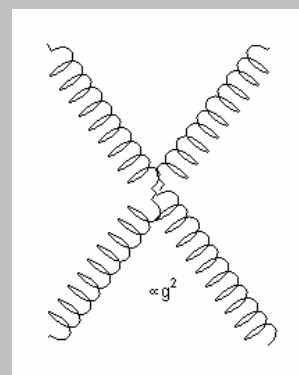
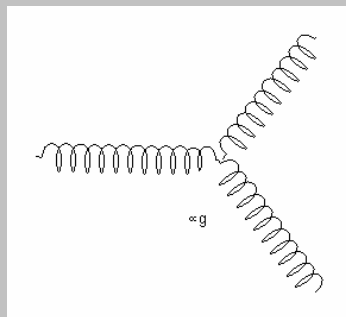
$$ig\frac{\lambda_a}{2}\gamma_\mu$$



La struttura di Lorentz e' evidentemente la stessa, ma in *QCD* la costante e (uno "scalare nello spazio delle cariche") e' rimpiazzata dall'insieme di costanti $g\lambda_a/2$, $a=1,...,8$ che sono matrici 3×3 nello spazio del colore; poiche' ci sono 8 matrici indipendenti, contiamo altrettanti vertici elementari, invece di uno solo. Corrispondentemente, come anticipato, ci sono 8 gluoni invece dell'unico fotone della QED, ognuno dei quali trasporta una carica di colore e di anticolore (uguali o diversi). In entrambi i casi, la carica in gioco viene conservata al vertice di interazione, ma: mentre l'interazione con il fotone (neutro) lascia intatta la carica dell'elettrone, l'interazione con il gluone (colorato) cambia in generale il colore del quark; si notera' tuttavia che esistono 2 gluoni "diagonali" nel colore, g_3 e g_8 , che percio' di fatto non cambiano il colore. Se si vuole, ci si puo' raffigurare la diversa situazione nel modo seguente, nel quale si rappresenta rispettivamente il flusso di carica e di colore:



I vertici elementari a 3 e 4 gluoni



La struttura di Lorentz di questi vertici, che non hanno analogo in QED, e' piu' complicata e non viene riportata qui; si osservi che il vertice a 4 gluoni ha una costante di accoppiamento uguale a g^2 , ed e' quindi di solito relativamente soppresso rispetto agli altri visto che $g < 1$

Riassumendo, l'ipotesi fondamentale e' dunque che l'interazione forte abbia origine dalla carica di colore portata dai quark; in analogia alla QED, dobbiamo supporre che il gruppo di simmetria legato al colore generi le trasformazioni di gauge locali, rispetto alle quali la lagrangiana dei quark deve rimanere invariante. Qual e' il gruppo di simmetria di queste trasformazioni? Esso e' il gruppo cui appartengono le matrici che agiscono sulle componenti colorate degli stati dei quark, ossia $SU(3)_C$. Ora, questo gruppo *non* e' abeliano: questo fatto, che stabilisce la piu' importante differenza fra la QCD e la QED, ha conseguenze di estrema importanza, la principale delle quali e' la non neutralita' dei quanti del campo di gauge che trasmette l'interazione di colore.

5. Gli stati di colore dei gluoni

In conseguenza alla non-invarianza della lagrangiana libera dei quark colorati rispetto alle trasformazioni di gauge locali descritte prima, si richiede dunque, come per la *QED*, l'esistenza di un campo compensatore, con l'aggiunta del quale l'invarianza e' restaurata: questo campo e' il *campo gluonico*, analogo al campo e.m.. Con la sua aggiunta, viene garantita la conservazione locale della carica di colore associata al campo del quark, in modo del tutto analogo (anche se matematicamente piu' complicato) alla conservazione della carica elettrica vista prima: il campo di colore e' accoppiato alle cariche di colore, che vengono create o distrutte in modo da conservare la carica totale di colore.

Come si e' accennato, la differenza cruciale rispetto al campo elettromagnetico risulta dal fatto che il gruppo di simmetria del colore non e' abeliano: infatti, mentre il campo e.m. e il suo unico tipo di quanto (il fotone) sono privi di carica, il campo di colore ha 8 tipi di quanti (gli 8 *gluoni*), *che sono portatori anch'essi della carica di colore*; questa e' una conseguenza della struttura del gruppo $SU(3)_c$.

- nel caso della *QED*, il vertice elementare dell'interazione conserva la carica elettrica; poiche' il gruppo $U(1)$ e' abeliano, gli stati del campo e.m devono essere a carica nulla.

Un po' formalisticamente: come accennato prima, il campo compensatore che deve essere introdotto per garantire l'invarianza per trasformazioni di gauge locali realizza la rappresentazione aggiunta del gruppo di simmetria; quando il gruppo e' abeliano, come $U(1)$, la rappresentazione aggiunta e' banale, ossia e' una costante uguale a 1 nello spazio delle cariche. Questo vuol dire che il campo compensatore stesso *non* si trasforma, il che significa che la sua carica deve necessariamente essere nulla

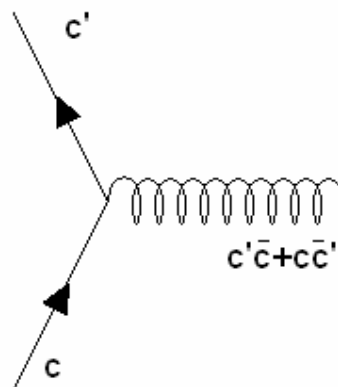
- nel caso della *QCD*, i vertici elementari sono del tutto analoghi a quello della *QED*, quindi conservano la carica totale di colore. Siccome questa volta il gruppo $SU(3)_c$ non e' abeliano, prevediamo che gli stati del campo siano in generale colorati.

Intuitivamente, la conservazione del colore nel vertice elementare *qqg* fissa gli stati di colore del campo gluonico, che devono venire dalla decomposizione del prodotto degli stati di colore di un *tripletto* (quark) e un *antitripetto* (antiquark) di colore, che sono appunto accoppiati al gluone nel vertice elementare: $3 \otimes 3^* = 1 \oplus 8$. Quindi, in linea di principio, i gluoni potrebbero appartenere a un *singoletto* di $SU(3)_c$ (1 solo gluone, a colore necessariamente nullo), o a un *ottetto* di $SU(3)_c$ (8 gluoni, a colore diverso o uguale a 0); di fatto, questo equivarrebbe ad assumere come gruppo di simmetria di gauge $U(3)$ (che ha 9 parametri) invece di $SU(3)$. Se esistesse un gluone singoletto di colore, esso potrebbe accoppiarsi a stati non

singoletti di colore (come un barione o un mesone colorati, o un quark), che potrebbero così diventare accessibili all'esperimento; ma stati colorati non sono mai stati visti. Quindi il gluone appartiene alla rappresentazione **8** (rapp. aggiunta), e il gruppo è $SU(3)$. Si osservi come l'esistenza eventuale di un gluone singoletto di colore porti necessariamente a prevedere, fra l'altro, un'interazione forte a lungo range: in effetti, si tratterebbe di una specie di versione forte della QED (1 tipo di quanti del campo, privo di carica di colore, a spin 1 e massa zero). Poiché di tale interazione non c'è traccia (sarebbe facilmente identificabile in quanto p.es. nella materia ordinaria si accoppierebbe uniformemente ai barioni, indipendentemente dalla loro carica), dobbiamo concludere che i gluoni non sono singoletti di colore.

Questa osservazione porta a farne subito un'altra: il fatto che l'interazione di colore risulti essere a corto range e' in fondo accessorio, anche se ovviamente importantissimo in concreto: massa gluone = 0 implica in linea di principio un range infinito dell'interazione. E' solo il confinamento del colore – per ora, in larga misura, un fatto sperimentale - che porta a un'interazione a corto range.

Come sono fatti gli stati di colore dei gluoni? Si pensi per un momento alla situazione analoga per $SU(3)_f$: i mesoni, che stanno nella rappresentazione **8**, sono stati a contenuto definito di flavor/antiflavor (p.es., $u\bar{d}, s\bar{u}, \dots$), o sovrapposizioni di stati di questo tipo. Analogamente, i gluoni, che stanno nella rappresentazione **8**, sono stati a contenuto definito di colore/anticolore. Ora, nel caso della QCD *il colore dei quark in generale viene cambiato dall'interazione con i gluoni*



Gli stati di colore degli 8 gluoni possono essere scelti nel seguente modo:

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{b} + b\bar{r})$$

$$|2\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}(r\bar{b} - b\bar{r})$$

$$|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - b\bar{b})$$

$$|4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{g} + g\bar{r})$$

$$|5\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}(r\bar{g} - g\bar{r})$$

$$|6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(b\bar{g} + g\bar{b})$$

$$|7\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}(b\bar{g} - g\bar{b})$$

$$|8\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + b\bar{b} - 2g\bar{g})$$

Commenti:

- appartenendo alla rappresentazione **8**, i gluoni sono particelle colorate, quindi confinate
- non si confonda il contenuto di colore con una specie di "contenuto in quark": i gluoni sono particelle elementari come il fotone, non stati composti come un mesone
- lo stato di colore di un sistema, quindi, può manifestarsi in modi diversi, che chiamiamo rappresentazioni del gruppo di simmetria del colore $SU(3)_C$: quelle rilevanti sono singoletti, tripletti, ottetti
- non si confonda uno stato a colore 0 (come $|3\rangle$ o $|8\rangle$ sopra) con uno stato singoletto di colore:

- singoletto $\Rightarrow$ colore = 0
- colore = 0 $\nRightarrow$ singoletto

Si pensi alla composizione di 2 spin $\frac{1}{2}$:

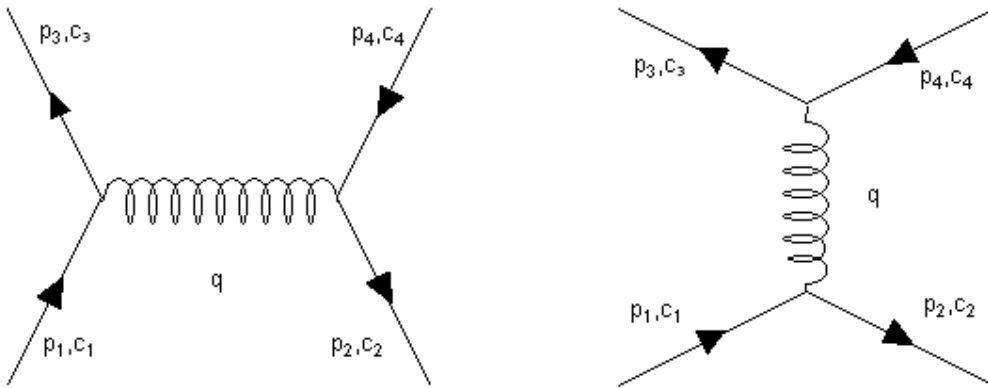
- $S=0 \Rightarrow S_z=0$
- $S_z=0 \nRightarrow S=0$

6. Caratteristiche dell'interazione qq e $q\bar{q}$; fattore di colore

E' interessante esaminare le proprieta' dei vertici fondamentali della QCD, che assomigliano molto a quelle del vertice fondamentale in QED, analizzando le ampiezza di interazione quark-antiquark e quark-quark

Interazione $q\bar{q}$

I diagrammi in gioco, all'ordine piu' basso, sono questi:



dove i simboli c_i indicano lo stato di colore. L'elemento di matrice e' allora:

$$T_{fi} = i \sum_{\alpha, \beta=1}^8 \underbrace{\left[\bar{u}(3)c_3^\dagger \right] \left[-i \frac{g_s}{2} \lambda^\alpha \gamma^\mu \right] \left[u(1)c_1 \right]}_{\text{corrente di colore}} \underbrace{\left[-i \frac{g_{\mu\nu} \delta^{\alpha\beta}}{q^2} \right]}_{\text{propagatore}} \underbrace{\left[\bar{v}(2)c_2^\dagger \right] \left[-i \frac{g_s}{2} \lambda^\beta \gamma^\nu \right] \left[v(4)c_4 \right]}_{\text{corrente di colore}}$$

in totale analogia al caso elettromagnetico. Si osservi come la somma doppia sulle matrici di colore sia ridotta a una somma semplice dalla δ di Kronecker, che risulta dalla conservazione del colore totale: se si vuole, essa garantisce che l'accoppiamento $q\bar{q}g$ sia lo stesso nei 2 vertici, che sono in effetti uniti dal propagatore di un unico gluone. L'espressione si puo' riscrivere:

$$T_{fi} = \frac{-g_s^2}{q^2} \left[\bar{u}(3) \gamma^\mu u(1) \right] \left[\bar{v}(2) \gamma_\mu v(4) \right] \underbrace{\frac{1}{4} \sum_{\alpha} \left[c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1 \right] \left[c_2^\dagger \lambda^\alpha c_4 \right]}_{\text{fattore di colore}}$$

Le uniche differenze rispetto al caso della QED sono

- la sostituzione di $g_s=g$ a g_e (la carica di colore prende il posto della carica elettrica, come e' ovvio)
- la comparsa del fattore di colore, che dipende dal fatto che il colore si somma "vettorialmente"

Se prendiamo il caso della *QED*, il "fattore di carica" non e' altro che il prodotto dei segni delle due cariche in interazione, e quindi vale:

- + 1 per cariche dello stesso segno
- 1 per cariche di segno opposto

Essendo la situazione del tutto analoga al caso dell'elettromagnetismo, ci aspettiamo che il potenziale efficace che, nell'approssimazione non relativistica, descrive l'interazione fra due stati colorati sia analogo al potenziale Coulombiano:

$$V_{q\bar{q}}(r) = -f \frac{\alpha_s}{r}$$

essendo α_s la costante di struttura fine (leggi: la costante di accoppiamento del campo di colore) per l'interazione forte. Il fattore di colore f dipende dallo stato di colore complessivo dei 2 quark interagenti: per un quark e un antiquark, sappiamo che lo stato di colore complessivo e'

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$$

quindi ottetto o singoletto.

Si noti che in ogni caso nel calcolo dobbiamo mediare l'elemento di matrice sugli stati di colore iniziali e sommarlo sugli stati di colore finali (tutti quelli possibili), in completa analogia con la procedura usata per gli stati di spin: tuttavia, mentre nel caso dello spin e' perfettamente lecito, in linea di principio e in pratica, considerare anche elementi di matrice non sommati o mediati (v. scattering polarizzato), in questo caso l'ipotesi di confinamento del colore *obbliga* a mediare e sommare in ogni caso. Di fatto, il grado di liberta' del colore si comporta come una *variabile nascosta* per cio' che riguarda gli stati asintotici (adroni)

Ottetto

Gli stati di colore $q\bar{q}$ dell'ottetto possono essere scelti come quelli dei gluoni:

$$\begin{aligned}
|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{b} + b\bar{r}), |2\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}(r\bar{b} - b\bar{r}), |3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - b\bar{b}) \\
|4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{g} + g\bar{r}), |5\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}(r\bar{g} - g\bar{r}), |6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(b\bar{g} + g\bar{b}) \\
|7\rangle &= -\frac{i}{\sqrt{2}}(b\bar{g} - g\bar{b}), |8\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + b\bar{b} - 2g\bar{g})
\end{aligned}$$

In questo caso, possiamo considerare uno qualsiasi degli stati di colore gluonici, p.es. $r\bar{b}$: in considerazione della simmetria $SU(3)$, qualunque altro degli 8 darebbe lo stesso risultato. Si ha:

$$\begin{aligned}
c_1 = c_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
c_2 = c_4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\left\{ \rightarrow f = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^8 (1 \ 0 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\rightarrow f = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^8 \lambda_{11}^\alpha \lambda_{22}^\alpha = \frac{1}{4} (\lambda_{11}^3 \lambda_{22}^3 + \lambda_{11}^8 \lambda_{22}^8) = -\frac{1}{6}$$

Tutte le altre 6 matrici hanno elementi nulli in 11 e 22.

Per tutti gli altri stati dell'ottetto il fattore di colore e' lo stesso, per cui la media sugli stati iniziali lascia f invariato. La conservazione del colore d'altra parte fissa il colore dello stato finale a quello dello stato iniziale. E' da notare che, secondo l'ipotesi del confinamento, una coppia quark-antiquark in uno stato di ottetto di colore non puo' costituire uno stato mesonico, perche' sarebbe uno stato colorato; evidentemente puo' tuttavia sussistere in stati di scattering nelle interazioni fra adroni.

Singoletto

Lo stato di singoletto e':

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g})$$

Questo e' lo stato di colore che avrebbero p.es. i $q\bar{q}$ legati in un mesone. I quark nello stato iniziale e finale devono essere nello stesso stato di colore complessivo, il che rende le cose un po' piu' complicate rispetto al caso precedente: infatti ogni componente dello stato di colore iniziale puo' andare in ogni componente dello stato di colore finale.

Quindi possiamo scrivere, per ognuna delle 3 componenti dello stato finale:

$$f_i = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{\alpha=1}^8 \left[c_3^\dagger \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[(1 \ 0 \ 0) \lambda^\alpha c_4 \right] + \left[c_3^\dagger \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[(0 \ 1 \ 0) \lambda^\alpha c_4 \right] + \left[c_3^\dagger \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \left[(0 \ 0 \ 1) \lambda^\alpha c_4 \right]$$

$i = 1, 2, 3$

Quindi ci sono 9 termini in tutto che si possono scrivere in breve:

$$f = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{\alpha=1}^8 \sum_{i,j=1}^3 \lambda_{ij}^\alpha \lambda_{ji}^\alpha = \frac{1}{12} \text{Tr}(\lambda^\alpha \lambda^\alpha)$$

Poiche' vale la proprieta':

$$\text{Tr}(\lambda^\alpha \lambda^\beta) = 2\delta^{\alpha\beta}$$

infine troviamo:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\lambda^\alpha \lambda^\alpha) &= 16 \\ \rightarrow f &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

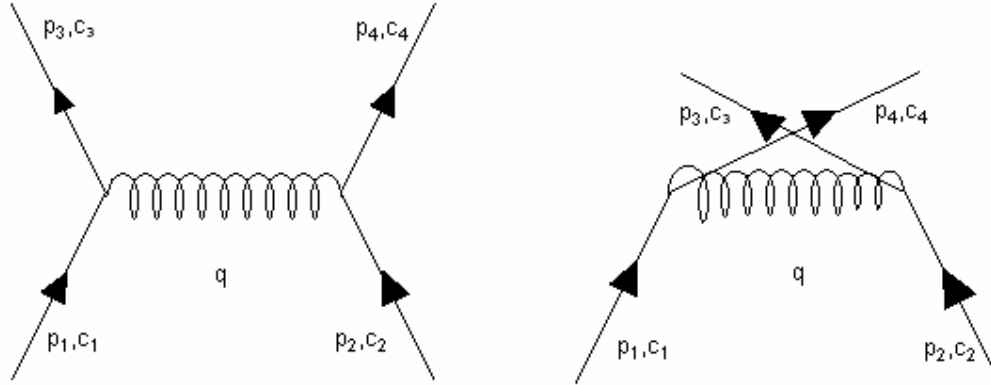
Nel limite non relativistico, dunque, l'interazione quark-antiquark e' governata (approssimazione a 1 gluone) dai potenziali, analoghi a quello Coulombiano:

$$V_{q\bar{q}} = \begin{cases} -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} & \text{singoleto} \\ \frac{1}{6} \frac{\alpha_s}{r} & \text{ottetto} \end{cases}$$

Si noti come il potenziale nello stato di singoletto sia attrattivo, mentre quello in stato di ottetto sia repulsivo: questo va nella direzione di confermare l'ipotesi che gli stati stabili (mesoni) siano singoletti di colore (ossia, e' in accordo con la regola, fin qui non giustificata, che gli stati fisici siano singoletti di colore: si noti che, tuttavia, *non si e' finora potuto provare che il confinamento sia una conseguenza necessaria della QCD*).

Interazione qq

In questo caso, i diagrammi in gioco sono:



dei quali il secondo conduce allo stesso potenziale del primo: possiamo quindi limitarci a considerare quest'ultimo. Ripetendo le considerazioni fatte per $q\bar{q}$, troviamo:

$$T_{fi} = \frac{-g_s^2}{q^2} [\bar{u}(3) \gamma^\mu u(1)] [\bar{u}(4) \gamma_\mu u(2)] \underbrace{\frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^8 [c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1] [c_4^\dagger \lambda^\alpha c_2]}_{\text{fattore di colore}}$$

Si noti, rispetto al caso precedente, lo scambio di ruolo fra gli spinori dello stato finale, dovuto al fatto che questa volta abbiamo a che fare solo con stati di quark, e non di quark e antiquark.

Il fattore di colore e', questa volta:

$$f_{qq} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^8 (c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1) (c_4^\dagger \lambda^\alpha c_2)$$

Gli stati di colore totale possibili, questa volta, sono quelli delle rappresentazioni **3*** e **6**: essi possono essere definiti come:

$$\begin{aligned} \mathbf{3}^*: & \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(rb - br), \frac{1}{\sqrt{2}}(bg - gb), \frac{1}{\sqrt{2}}(gr - rg) \\ \mathbf{6}: & \quad rr, bb, gg, \frac{1}{\sqrt{2}}(rb + br), \frac{1}{\sqrt{2}}(bg + gb), \frac{1}{\sqrt{2}}(gr + rg) \end{aligned}$$

Sestetto

Usando uno qualsiasi dei 6 stati (tutti danno lo stesso fattore di colore), scegliamo rr :

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si trova:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^8 \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^8 (\lambda_{11}^\alpha \lambda_{11}^\alpha) \\ &= \frac{1}{4} (\lambda_{11}^3 \lambda_{11}^3 + \lambda_{11}^8 \lambda_{11}^8) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Tripletto

Come al solito, si puo' usare uno qualsiasi dei 3 stati: occorrera' sommare su tutte le combinazioni possibili, come gia' fatto prima per il singoletto nel $q\bar{q}$. Si ottiene:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=1}^8 \left\{ + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\} \end{aligned}$$

Tenuto conto delle proprieta' delle matrici lambda, si ha infine:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{8} \sum_{\alpha=1}^8 \{ \lambda_{11}^\alpha \lambda_{22}^\alpha - \lambda_{21}^\alpha \lambda_{12}^\alpha - \lambda_{12}^\alpha \lambda_{21}^\alpha + \lambda_{22}^\alpha \lambda_{11}^\alpha \} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^8 \{ \lambda_{11}^\alpha \lambda_{22}^\alpha - \lambda_{12}^\alpha \lambda_{21}^\alpha \} = \frac{1}{4} \{ \lambda_{11}^3 \lambda_{22}^3 + \lambda_{11}^8 \lambda_{22}^8 - \lambda_{12}^1 \lambda_{21}^1 - \lambda_{12}^2 \lambda_{21}^2 \} \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Anche in questo caso si puo' considerare l'approssimazione non relativistica dell'ampiezza: l'interesse del potenziale efficace qq sta ovviamente nella comprensione degli stati barionici. Esso si scrivera' dunque:

$$V_{qq} = \begin{cases} -\frac{2}{3} \frac{\alpha_s}{r} & \text{tripletto} \\ \frac{1}{3} \frac{\alpha_s}{r} & \text{sestetto} \end{cases}$$

NB Si osservi che c'è ora un segno – complessivo extra (nell'ampiezza, e quindi nel potenziale che la approssima), rispetto al caso precedente, dovuto al fatto che abbiamo una coppia particella-particella e non particella-antiparticella

Per trarre qualche conclusione sul legame nei barioni, si osservi che gli stati di colore per un barione sono **1+8+8+10** (come nel caso del flavor):

1: ogni coppia qq è in uno stato di tripletto di colore $\rightarrow$ attrattivo

8: alcune coppie in stato di tripletto, altre di sestetto $\rightarrow$ attrattivo + repulsivo

10: ogni coppia è in stato di sestetto $\rightarrow$ repulsivo

Quindi lo stato di singoletto di colore è l'unico in cui ci sia solo attrazione fra i quark, che di nuovo conferma (anche se non dimostra!) l'ipotesi iniziale che tutti gli stati legati siano singoletti di colore.

La manipolazione dei fattori di colore è ovviamente anche necessaria nei processi di scattering quark-quark e quark-antiquark, a prescindere dall'approssimazione a potenziale.

8. Conservazione del colore; decadimenti del quarkonio

L'interazione di colore segue due leggi fondamentali: la prima, che è in un certo senso una generalizzazione della legge di conservazione della carica per l'interazione elettromagnetica, stabilisce che in ogni processo forte deve essere rispettata la conservazione del colore; l'altra, che non ha equivalenti per l'interazione elettromagnetica, dice che gli stati di particella (ossia, gli adroni) sono sempre singoletti di colore. Queste leggi danno origine a diverse regole non banali per ciò che riguarda le interazioni forti.

Innanzitutto, osserviamo che reazioni forti fra stati adronici possono solo avvenire attraverso lo scambio di singoletti di colore (altri adroni), e non attraverso lo scambio di singoli costituenti colorati, come quark e gluoni

Secondariamente, reazioni fra coppie di quark per i quali lo stato iniziale sia uno stato mesonico o barionico avvengono rispettando la conservazione del colore: quindi, per esempio, una coppia quark-antiquark legata in un mesone non può

annichilare in un stato virtuale con un singolo gluone, che sarebbe un ottetto, ma solo in stati di 2 o piu' gluoni. In effetti, uno stato di 2 gluoni appartiene alla rappresentazione 8×8 di $SU(3)_c$, che si decompone:

$$8 \otimes 8 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus \overline{10} \oplus 27$$

Quindi il prodotto contiene un singoletto; il risultato si estende poi a stati con un numero qualsiasi di gluoni. La regola non si applica, ovviamente, ad interazioni fra coppie quark-antiquark non costituenti un mesone (p. es., quelle che avvengono in urti fra adroni di energia elevata), che non sono necessariamente in uno stato di singoletto di colore ma possono essere in uno stato di ottetto: in questi casi l'annichilazione in un gluone e' permessa. Similmente, una coppia di quark in un barione puo' stare solo in uno stato di antitripletto, mentre nel caso generale anche il sestetto e' possibile

(Infatti, ricordiamo:

$$3 \otimes 3 = \overline{3} \oplus 6$$

ma combinando i due quark con il terzo, dobbiamo tenere solo la componente che puo' produrre un singoletto nello stato del barione, quindi $\overline{3}$).

Un'applicazione interessante di queste regole e' il decadimento di stati del quarkonio: se per esempio si considerano gli stati a massa piu' bassa (singoletto 1S_0 , e tripletto 3S_1), si puo' immediatamente osservare che l'annichilazione dovra' avvenire in 2 o piu' gluoni; d'altra parte, i 2 stati hanno numeri quantici

$$\begin{array}{lll} \text{singoletto} & \eta_c & J^{PC} = 1^{--} \\ \text{tripletto} & J/\psi & J^{PC} = 0^{-+} \end{array}$$

Poiche' il gluone ha gli stessi numeri quantici del fotone, il singoletto potra' annichilare in 2 gluoni, mentre il tripletto dovra' andare in 3 (come para- e orto-positronio per i decadimenti in 2 e 3 fotoni). Poiche' ogni accoppiamento porta una costante $\alpha_s < 1$, ci aspettiamo che la larghezza del tripletto sia piu' piccola di quella del singoletto, come osservato.

8. Liberta' asintotica e scala di energia

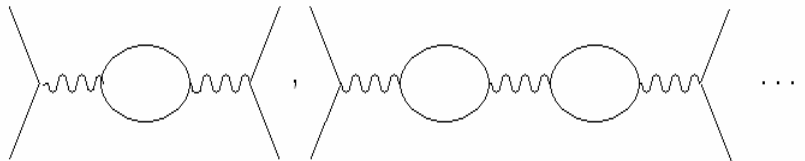
AVVERTENZA IMPORTANTE

Nei paragrafi che seguono viene presentata, in forma estremamente succinta e puramente descrittiva, una micro-introduzione agli aspetti della QCD piu' rilevanti per le applicazioni alle funzioni di struttura e alla fenomenologia collegata, con l'unico scopo di introdurre l'argomento e mostrare come la teoria trovi notevoli conferme sperimentali. Per una trattazione comprensiva e soddisfacente occorre fare riferimento ai corsi e ai testi di teoria dei campi.

In *QED* esiste, come e' noto, il fenomeno della polarizzazione del vuoto: il vuoto stesso agisce in un certo senso come un mezzo dielettrico. La carica elettrica delle coppie virtuali elettrone-positrone che si trovano in vicinanza di una carica libera (come quella di un elettrone) agiscono come una specie di schermo, con il risultato che la carica efficace dipende dalla distanza, o dal q^2 dell'interazione con la quale la sondiamo. L'espressione per la costante di struttura fina, dipendente dal q^2 , e valida per $q^2 \gg m^2$, e':

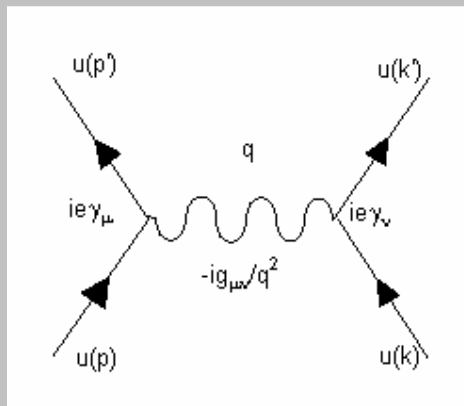
$$\alpha(|q^2|) = \frac{\alpha(0)}{1 - (\alpha(0)/3\pi) \ln(|q^2|/m^2)}$$

(L'espressione e' divergente ad energie *molto* elevate). Come si ricordera', questo fenomeno (la *running coupling constant*) e' dovuto alla presenza di diagrammi a loop, dei quali quelli che contano sono della serie:



Il calcolo rigoroso e dettagliato degli effetti di polarizzazione del vuoto e' tecnicamente piuttosto complicato, ed esce dai limiti di un corso introduttivo. Quella che segue e' dunque solo una breve esposizione intuitiva delle idee principali.

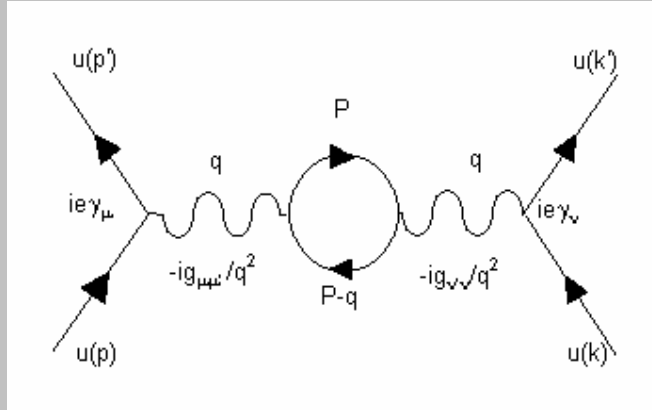
Consideriamo lo scattering e^-e^- nell'approssimazione a 1 fotone: esso sara' descritto dal diagramma di Feynman



cui corrisponde l'elemento di matrice

$$M \propto j(k, k') \frac{1}{q^2} j(p, p') \propto [e\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)] \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} [e\bar{u}(p')\gamma^\nu u(p)]$$

Tuttavia, l'approssimazione a 1 fotone non e' la fine della storia: nello sviluppo perturbativo possiamo considerare i termini seguenti, di cui uno importante e':



nel quale il propagatore del fotone e' stato sostituito con un'approssimazione piu' accurata. La creazione e l'annichilazione di una coppia virtuale e^+e^- compare come un *loop fermionico* inserito nel propagatore, che corregge l'espressione data prima per l'elemento di matrice:

$$M \propto [e\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)] \frac{g_{\mu\mu'}}{q^2} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4P \frac{[e\bar{u}(P)\gamma^{\mu'} u(P-q)] [e\bar{u}(P-q)\gamma^{\nu'} u(P)]}{P^2 - m^2 (P-q)^2 - m^2} \frac{g_{\nu\nu'}}{q^2} [e\bar{u}(p')\gamma^\nu u(p)]$$

L'integrale e' su tutti i 4-impulsi che possono comparire nel loop, e l'elemento di matrice che ne risulta e' all'ordine α^2 .

Il calcolo (piuttosto complicato) della modifica al propagatore fornisce come risultato l'espressione all'ordine α^2 :

$$\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \rightarrow \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} (1 - I(q^2))$$

$$I(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \int_{m^2}^{\infty} \frac{dp^2}{p^2} - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[1 - \frac{q^2 x(1-x)}{m^2} \right]$$

Il primo integrale e' ovviamente infinito; esso viene maneggiato introducendo un *cutoff* Λ^2 per il limite superiore, eventualmente da mandare all'infinito alla

fine dei calcoli; il secondo integrale si può valutare numericamente: si ottiene, in due casi limite, ossia per $-q^2 \gg m^2$ e $-q^2 \ll m^2$:

Caso $q^2 \gg m^2$

$$-q^2 \gg m^2 \rightarrow \ln \left[1 - \frac{q^2 x(1-x)}{m^2} \right] \approx \ln \left[-\frac{q^2}{m^2} \right]$$

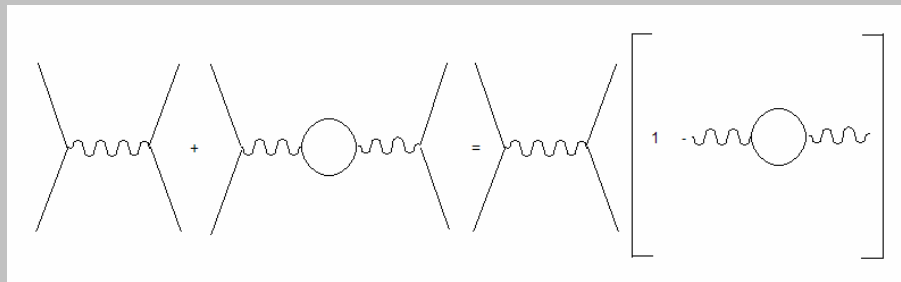
da cui

$$\begin{aligned} I(q^2) &\approx \frac{\alpha}{3\pi} \int_{m^2}^{\Lambda^2} \frac{dp^2}{p^2} - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[\frac{-q^2}{m^2} \right] \\ &= \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - \frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{6} \ln \left[\frac{-q^2}{m^2} \right] \\ &= \frac{\alpha}{3\pi} \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - \ln \left[\frac{-q^2}{m^2} \right] \right] = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{-q^2} \right) \end{aligned}$$

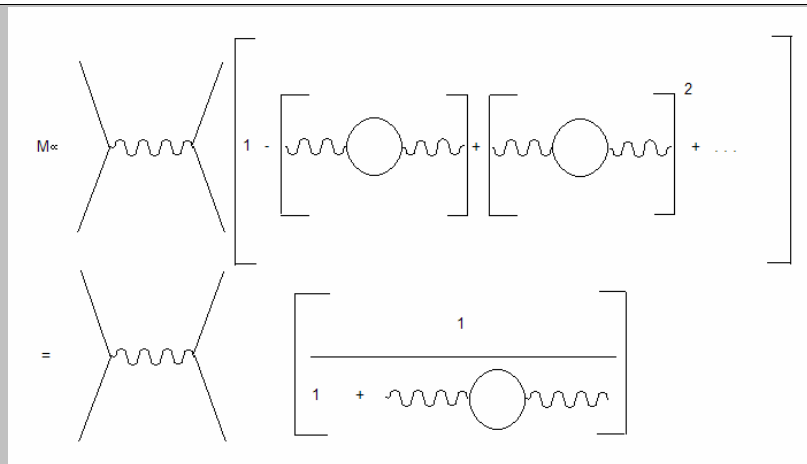
Quindi l'elemento di matrice all'ordine α^2 si scrive

$$M \propto [e\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)] \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left[1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{-q^2} \right) \right] [e\bar{u}(p')\gamma^\nu u(p)]$$

o simbolicamente:



Si può far vedere che considerando le correzioni al propagatore agli ordini successivi, si ottiene la somma di una serie geometrica:



cui corrisponde l'elemento di matrice, esatto a tutti gli ordini ma ancora dipendente dal cutoff:

$$M \propto [\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k)] \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left[\frac{\alpha}{1 + \alpha/3\pi \ln(\Lambda^2/-q^2)} \right] [\bar{u}(p') \gamma^\nu u(p)]$$

Il significato dell'espressione e' interessante: il valore di α che abbiamo usato per ottenere l'elemento di matrice esatto e' quello che compare nel vertice "nudo", ossia in quello privo di tutte le correzioni dovute ai loop: questo vertice pero' e' di fatto inaccessibile sperimentalmente, perche' non si possono "spegnere" i loop; quindi anche il relativo valore di α non e' misurabile, e per ricordarcene lo rinominiamo α_0 . La carica elettrica che misuriamo sperimentalmente per l'elettrone e' quella che compare nell'elemento di matrice corretto, che contiene quindi l'effetto di tutti i loop: possiamo allora scrivere

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + (\alpha_0/3\pi) \ln(\Lambda^2/Q^2)}$$

$$Q^2 = -q^2$$

Il valore di α che misuriamo dipende dunque dal Q^2 ; se supponiamo di misurare il suo valore a $Q^2 = \mu^2$, avremo:

$$\alpha(\mu^2) = \frac{\alpha_0}{1 + (\alpha_0/3\pi) \ln(\Lambda^2/\mu^2)}$$

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha_0}{1 + (\alpha_0/3\pi) \ln(\Lambda^2/Q^2)}$$

$$\ln\left(\frac{\Lambda^2}{Q^2}\right) = \ln\left(\frac{\Lambda^2}{Q^2} \frac{\mu^2}{\mu^2}\right) = \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) + \ln\left(\frac{\mu^2}{Q^2}\right)$$

$$\rightarrow \alpha(Q^2) = \frac{\alpha_0}{1 + (\alpha_0/3\pi) [\ln(\Lambda^2/\mu^2) + \ln(\mu^2/Q^2)]}$$

$$\alpha(\mu^2) = \frac{\alpha_0}{1 + (\alpha_0/3\pi) \ln(\Lambda^2/\mu^2)}$$

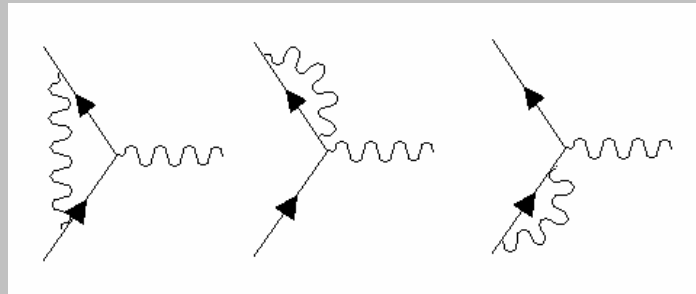
$$\rightarrow \frac{\alpha_0}{\alpha(\mu^2)} = 1 + (\alpha_0/3\pi) \ln(\Lambda^2/\mu^2)$$

$$\rightarrow \alpha(Q^2) = \frac{\alpha_0}{\alpha_0/\alpha(\mu^2) + (\alpha_0/3\pi) \ln(\mu^2/Q^2)}$$

$$\rightarrow \alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - [\alpha(\mu^2)/3\pi] \ln(Q^2/\mu^2)}$$

Questa espressione contiene, come la precedente, la dipendenza della costante di accoppiamento dal Q^2 , ma e' indipendente dal cutoff, e dipende solo dal valore, *del tutto misurabile*, della costante stessa ad un prefissato valore $Q^2 = \mu^2$.

Naturalmente si puo' osservare che ci sono altri diagrammi a 2 fotoni che sono in gioco oltre a quello citato, come i seguenti:

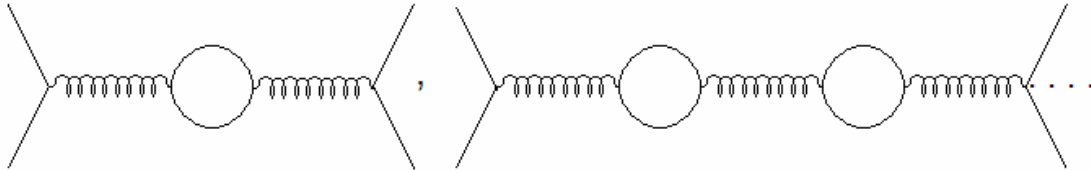


Come conseguenza delle *identita' di Ward* (una proprieta' fondamentale dell'interazione elettromagnetica, e anche delle altre del Modello Standard), per cio' che riguarda la variazione della costante di accoppiamento con Q^2 l'effetto sommato dei 3 grafici indicati e' magicamente nullo, per cui ci si puo' limitare a considerare le modifiche al propagatore (restano in realta' altri diagrammi, il cui contributo e' pero' molto piccolo) .

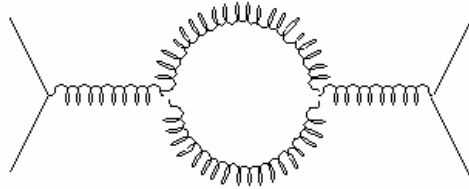
Caso $q^2 \ll m^2$

Questo caso, non rilevante per la dipendenza della costante di accoppiamento da Q^2 , porta da una correzione fissa della costante stessa, importante p.es. per il calcolo degli stati stazionari dell'atomo di H etc

In QCD succede una cosa analoga, tramite i diagrammi:



ai quali si aggiungono pero' anche quelli del tipo seguente, caratteristici di una teoria non abeliana:



L'effetto di schermaggio e' opposto per i loop di quark e quelli di gluoni: come risultato, la *running coupling constant* per la QCD dipende dal confronto fra il numero di flavor e il numero di gluoni (che dipende dal numero di colori), e si scrive, per il caso di 3 colori, e nella stessa approssimazione di alti q^2 :

$$\alpha_s(|q^2|) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + (\alpha_s(\mu^2)/12\pi)(33 - 2n_{\text{flavor}})\ln(|q^2|/\mu^2)}$$

Nel Modello Standard abbiamo 6 flavor, e il risultato e' che domina l'effetto dei gluoni: la "costante" di accoppiamento diminuisce all'aumentare del q^2 , ossia al diminuire della distanza, quindi *a piccole distanze l'interazione forte diventa debole*. Questa e' la proprieta'-chiave della QCD , e si chiama *liberta' asintotica*: essa ci dice anche che per processi a grandi q^2 e' possibile un trattamento perturbativo.

Qual e' il significato del parametro μ che compare nelle equazioni, e rispetto al quale misuriamo la grandezza del momento trasferito?

Se consideriamo la situazione analoga in QED , vediamo che $\alpha(q^2)$ e' normalmente espressa in termini di $\alpha(0)$, che corrisponde al valore della carica elettrica a distanza molto grande: questo e' possibile, perche' la carica elettrica si puo' misurare a grande distanza, ma non e' strettamente necessario, e si potrebbe benissimo esprimere $\alpha(q^2)$ in termini di un qualsiasi altro valore $\alpha(\mu^2)$.

Nel caso della QCD , non e' evidentemente possibile, a causa del confinamento del colore, misurare la carica di colore a distanza grande; quindi esprimiamo $\alpha_s(q^2)$ in termini di un suo valore a distanza $< \infty$, ossia a $-q^2 > 0$: il valore particolare scelto non ha importanza, tanto e' vero che a volte si preferisce esprimere la costante cosi':

$$\alpha_s(|q^2|) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_{\text{flavor}}) \ln(|q^2|/\Lambda^2)} \quad , \quad |q^2| \gg \Lambda^2$$

$$\ln \Lambda^2 = \ln \mu^2 - \frac{12\pi}{(33 - 2n_{\text{flavor}}) \alpha_s(\mu^2)}$$

in cui Λ e' una costante universale dell'interazione di colore. Essa e' difficile da determinare sperimentalmente con precisione, e vale $\Lambda \approx 100 - 300 \text{ MeV}$. Si noti che per $Q^2 \rightarrow \Lambda^2$ la costante di accoppiamento diverge, e quindi il trattamento perturbativo dell'ampiezza perde di significato; questa corrisponde alla regione di confinamento.

E' importante cogliere appieno il significato della costante Λ : come si sara' notato, non c'e' traccia di essa nella lagrangiana della QCD , nella quale compaiono solo le quantita' α_s e le masse dei quark correnti come parametri ad hoc. La scala di energia dell'interazione di colore compare quindi come *parametro emergente* dalla rinormalizzazione della teoria stessa: senza entrare in una discussione approfondita dell'argomento, che risulterebbe notevolmente complicata, si puo' dire che il carattere confinante dell'interazione, per altro non ancora completamente capito e dimostrato, porta necessariamente all'emergere di una scala naturale per le energie

Il significato di questi risultati e' della massima importanza: *l'intensita' dell'interazione e' una funzione decrescente di q^2* . Processi duri, nei quali q^2 e' molto grande, sono governati da una costante di accoppiamento di piccolo valore, e sono quindi suscettibili di una descrizione perturbativa: questa e' la liberta' asintotica. Processi soft, nei quali q^2 e' piccolo, mettono in gioco valori elevati della costante di accoppiamento, che proibiscono una trattazione perturbativa: questa e' la schiavitu' infrarossa, e da' presumibilmente luogo al confinamento del colore. La

regione di valori di q^2 che corrisponde alla transizione fra i due regimi e' quella in cui $q^2 \sim \Lambda^2$, $\Lambda \approx 300 \text{ MeV}$, coincidente grosso modo con la scala di massa degli adroni.

9. Quark di valenza e quark del mare

Sappiamo che in *QED* ogni carica "nuda", come quella di un elettrone, interagisce con il suo campo elettromagnetico, che "riempie", per così di dire, il vuoto con una densità efficace di fotoni e coppie virtuali. Ci sono diversi effetti dovuti a questo fenomeno, fra i quali la polarizzazione del vuoto e lo "schermaggio" della carica, che risulta ridotta a grandi distanze. Se volessimo essere pignoli (o rigorosi), dovremmo quindi correggere il linguaggio correntemente adottato p.es. in chimica o in fisica atomica: quando affermiamo che un atomo di idrogeno e' formato dal legame elettromagnetico fra un protone e un elettrone, stiamo in realtà facendo una notevole semplificazione, equivalente a fermarsi ad uno stadio iniziale dello sviluppo perturbativo dell'interazione elettromagnetica, per altro sufficientemente accurato per le normali applicazioni; esperienze più raffinate tuttavia mettono in luce l'esistenza di ulteriori componenti del sistema, fotoni e coppie virtuali, che concorrono a modificarne le proprietà (p.es. livelli energetici e momento magnetico) : e' gloria e vanto dei cultori della *QED* (teorici e sperimentali) che queste minute variazioni siano in perfetto accordo con i calcoli teorici, fino a una precisione straordinaria (dell'ordine di una parte su 10^{11} !). Per essere più rigorosi dovremmo quindi dire che un atomo di idrogeno (o di positronio, se si preferisce) e' costituito da 2 particelle cariche *di valenza*, *E* dal *mare* dei costituenti virtuali che le circondano (fotoni + coppie), la cui esistenza, appunto, virtuale produce nondimeno effetti del tutto reali, misurabili e misurati, sulle proprietà fondamentali del sistema.

In *QCD* avviene un fenomeno analogo: quindi se consideriamo un mesone o un barione le cariche di colore primarie dei quark *di valenza* sono immerse in un 'mare' di gluoni e coppie virtuali quark-antiquark. La complicazione nasce dal fatto che, essendo l'interazione di colore più forte di quella elettromagnetica, gli effetti sono molto più intensi, soprattutto a grandi distanze (ossia a piccoli q^2).

Di conseguenza, dobbiamo, alla luce di questo fatto, ripensare in parte la nostra descrizione semplificata della struttura generale degli adroni, come formati da coppie $q\bar{q}$ o tripletti qqq : di fatto, e' essenziale ricordare che *ogni possibile descrizione della struttura di un adrone e' fortemente legata alla scala di q^2 a cui la si riferisce*: descrizioni dello stesso sistema a q^2 molto diversi sono quindi molto diverse. Un tipico esempio di questo fenomeno pervasivo e' la struttura di spin del nucleone, che, apparentemente chiara quando la si analizza a piccoli q^2 (in pratica, considerando le proprietà statiche dei nucleoni stessi), diventa molto meno chiara (e tuttora non veramente spiegata) a q^2 elevati.

Data le caratteristiche essenziali della *QCD* (liberta' asintotica e confinamento), l'analisi e la descrizione degli stati legati risulta molto piu' complicata e meno credibile di quella di processi ad elevato q^2 : e' anzi perfino sorprendente che il semplice modello a quark di valenza renda conto piuttosto bene, anche quantitativamente, di cosi' tante proprieta' degli adroni in un regime non perturbativo. Stabilire un raccordo quantitativo fra la "semplice" teoria fondamentale e la sterminata (e complicata) modellistica sulla struttura degli adroni non e' facile dato il regime non perturbativo: lo sforzo in questa direzione e' tuttavia stato gia' estremamente utile nell'aiutare a rimuovere dal terreno di confronto gran parte dei modelli meno "QCD compatibili".

Ci si puo' chiedere infine come entri, in tutta questa teoria, la descrizione delle interazioni forti fra particelle "bianche", ossia fra adroni: qual e' la relazione fra le proprieta' della *QCD* e quelle della 'interazione nucleare' che, fra l'altro, tiene insieme i nuclei? Essa non e' considerata una forza fondamentale, ma un'interazione residua dovuta alle fluttuazioni quantiche degli stati di colore degli adroni stessi. Al pari delle forze chimiche "di Van der Waals", che agiscono fra atomi e molecole elettricamente neutri pur avendo un'origine elettromagnetica, le forze fra nucleoni e mesoni hanno origine dall'interazione di colore. Come lo studio delle forze di Van der Waals non sarebbe particolarmente rivelatore delle caratteristiche fondamentali dell'interazione elettromagnetica, cosi' lo studio delle interazioni fra adroni a bassa energia, per quanto di un certo interesse anche pratico, non aiuta particolarmente a cogliere la struttura fondamentale dell'interazione di colore: gli adroni interagiscono scambiandosi altri adroni.

10. La *QCD* perturbativa: $e^+ + e^- \rightarrow$ adroni, *DIS*, *jets*

I processi ad alto momento trasferito sono quelli nei quali la *QCD* fornisce descrizioni e previsioni con maggior successo.

Occorre rendersi conto che il confronto fra le previsioni (ottenute per processi che coinvolgono quark e gluoni (colorati)) e i dati sperimentali (sezioni d'urto per adroni (bianchi)) non e' del tutto immediato: a causa del confinamento del colore, infatti, noi non possiamo studiare direttamente lo scattering quark-quark, o l'emissione e l'assorbimento di gluoni da parte dei quark. Occorre quindi fare delle ipotesi (modelli) sui meccanismi con cui i costituenti sono confinati negli adroni nello stato iniziale, e con cui "adronizzano" nello stato finale.

Un altro punto importante da cogliere e' la notevole complessita' dei calcoli perturbativi, che richiedono fra l'altro la scelta di uno *schema* di rinormalizzazione e di una *scala* per la rinormalizzazione stessa (il parametro Λ discusso prima), .

$e^+ + e^- \rightarrow \text{adroni}$

Consideriamo il processo $e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q}$, come se potessimo realmente vedere i quark nello stato finale. Se siamo ad energie superiori alla soglia per produzione di $b, \bar{b}$ ma decisamente inferiori a m_{Z^0} , possiamo trascurare il contributo in corrente neutra e considerare il processo come completamente elettromagnetico, trovando per la sezione d'urto differenziale nel CM, nell'approssimazione a 1 fotone, un'espressione analoga a quella per la reazione $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta) \sum_{\text{flavor}} e_{\text{flavor}}^2$$

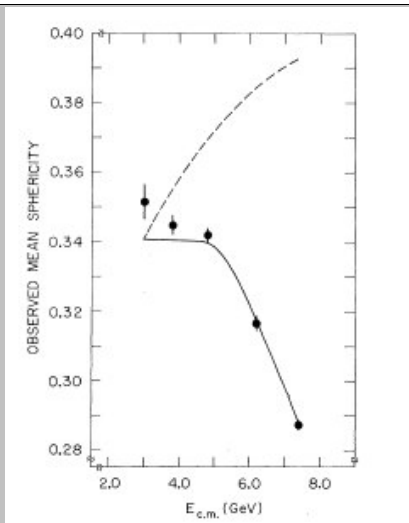
$$\rightarrow \sigma(s) = \frac{4\pi\alpha^2}{s} \sum_{\text{flavor}} e_{\text{flavor}}^2$$

formula già incontrata prima a proposito del rapporto R . Fenomenologicamente, questo processo è identificato con la reazione generica $e^+ + e^- \rightarrow \text{adroni}$, assumendo che il processo di adronizzazione dei quark non introduca correzioni alla sezione d'urto elementare; sperimentalmente si osservano, ad energie sufficientemente alte, eventi di produzione di 2 *jets* (gruppi di adroni correlati in direzione, in ricordo di quella del quark progenitore), la cui distribuzione angolare è conforme alla semplice previsione data sopra.

Lo studio sperimentale della produzione di jets ha avuto inizio a una delle prime macchine e^+e^- , SPEAR a SLAC. La misura della distribuzione angolare richiede preliminarmente la determinazione dell'asse del jet: questa viene effettuata costruendo con i dati misurati la quantità chiamata sfericità dell'evento

$$S = \frac{3}{2} \frac{\sum_i p_{\perp i}^2}{\sum_i p_i^2}$$

in cui la somma è estesa a tutte le tracce, e le componenti trasversali degli impulsi sono calcolate rispetto alla direzione dell'asse del jet: essa è definita come quella che minimizza la somma dei quadrati dei momenti trasversi. S risulta uguale a 0 per eventi con jets molto collimati, e uguale a 1 per eventi isotropi. Il seguente plot mostra l'andamento di $\langle S \rangle$ vs E_{CM} misurato a SPEAR, che come si vede conferma la produzione dominante di eventi a 2 jet ad energie sufficientemente elevate: la curva tratteggiata è il puro spazio delle fasi.



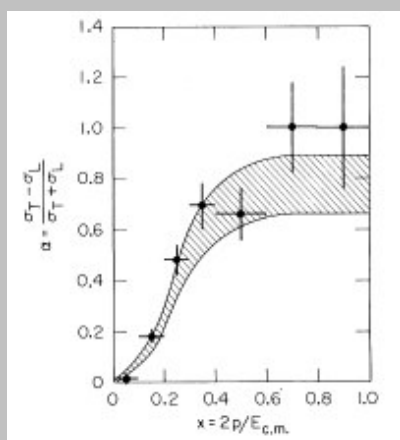
La distribuzione angolare dei 2 jet, come risulta predetta dal diagramma a 1 fotone, e':

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto 1 + \cos^2 \theta \quad \text{se i quark hanno spin } 1/2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto 1 - \cos^2 \theta \quad \text{se i quark hanno spin } 0$$

Il grafico seguente mostra il risultato per α nella formula generica

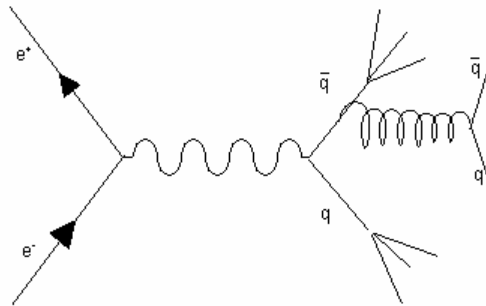
$$1 + \alpha \cos^2 \theta$$



che come si vede e' in buon accordo con l'ipotesi di spin $1/2$.

Dobbiamo tuttavia considerare, per questo processo, l'equivalente cromodinamico delle correzioni radiative in *QED* (emissione e assorbimento di fotoni e coppie

virtuali durante l'interazione); la correzione all'ordine piu' basso viene da diagrammi come questo:



corrispondenti quindi ad ampiezze per l'emissione di un gluone extra: si tratta dell'equivalente della bremsstrahlung; storicamente anzi l'evidenza sperimentale per il gluone venne da esperimenti in cui si osservavano eventi a 3 jets.

Va ricordato che l'analisi dei jets non e' sempre semplice e priva di ambiguita': le molteplicita' elevate spesso finiscono per oscurare la semplicita' basica dell'evento, e l'assegnazione delle particelle osservate ai diversi jets non si puo' fare sempre in modo univoco

E' interessante osservare che l'entita' della correzione, assumendo perturbativamente che sia quella dominante, e' un fattore $(1 + \alpha_s/\pi)$ nell'espressione delle sezioni d'urto citate sopra. Quindi questo fornisce un modo che per misurare α_s in funzione dell'energia, ottenendo p.es. valori come

$$\alpha_s(35 GeV) = 0.146 \pm 0.03$$

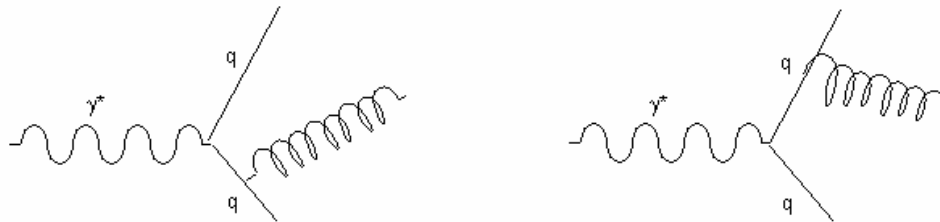
$$\alpha_s(M_{Z^0}) = 0.124 \pm 0.0043$$

DIS

Lo scattering profondamente anelastico e' stato precedentemente introdotto considerandolo solo dal punto di vista elettromagnetico, mostrando come il modello a partoni possa spiegare il fenomeno dello scaling delle funzioni di struttura. Tuttavia, contrariamente alla previsione del modello a partoni puro e semplice, un esame accurato dei dati sperimentali sulle funzioni di struttura mostra una moderata dipendenza da q^2 , il cui andamento cambia nelle diverse regioni di x considerate. Tale caratteristica e' in buon accordo con le previsioni della QCD, in cui si viene effettivamente a determinare una limitata dipendenza da q^2 delle distribuzioni in x di quark, antiquark e gluoni.

Riferendosi alle considerazioni fatte prima sulle differenti proprietà del nucleone che si osservano a diverse scale di q^2 , le previsioni di QCD forniscono appunto una chiave interpretativa importantissima per comprendere l'origine di tali differenze in termini di un'interazione fondamentale, e al tempo stesso costituiscono un banco di prova per la teoria stessa.

La QCD consente in effetti tutta una serie di previsioni dettagliate sulle correzioni e violazioni dello *scaling*, che trovano importanti conferme sperimentali. Fra le altre cose, i test di QCD effettuati in esperimenti di DIS forniscono anche misure di α_s , che in questo caso risultano meno ardue di quelle ottenibili nell'annichilazione e^+e^- . I processi all'ordine α_s assomigliano a quelli visti prima nell'annichilazione e^+e^- : il quark nello stato iniziale o finale assorbe o emette un gluone:



che viene poi osservato come un jet di adroni prodotti nella frammentazione; nel confronto con i dati sperimentali occorre tuttavia considerare diversi altri processi contenenti gluoni e quark virtuali, il che rende la trattazione piuttosto complicata dal punto di vista tecnico.

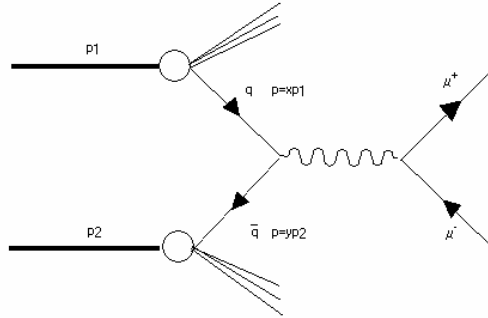
Queste correzioni sono evidentemente sensibili alla densità di gluoni, e quindi consentono di sondare la struttura di colore del nucleone. L'effetto delle correzioni è diverso nelle diverse regioni di x :

- a x piccoli, le funzioni di struttura risultano crescenti (logaritmicamente) con q^2
- a x grandi, l'andamento è rovesciato

Questa evoluzione delle funzioni di struttura in funzione di q^2 è ben descritta da un'eq. differenziale, l'*equazione di Altarelli-Parisi*, che, ottenuta per la prima volta circa 25 anni fa, costituisce tuttora il fondamento dell'analisi dei dati sperimentali negli esperimenti di DIS . Questo settore di ricerca, tuttora oggetto di molta attività che tenta di risolvere diversi dubbi e puzzle sulla struttura degli adroni, è però relativamente avanzato e di frontiera, ed esce dai limiti di una trattazione introduttiva.

Processo di Drell-Yan

Esso consiste nella produzione di coppie leptone-antileptone a massa invariante elevata (come e^+e^- , $\mu^+\mu^-$) in interazioni adroniche ad alta energia. Il processo elettromagnetico fondamentale e' rappresentato nel diagramma:



al quale si puo' far corrispondere la solita sezione d'urto elementare (elettromagnetica) fra costituenti:

$$\sigma(q\bar{q} \rightarrow l^+l^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2} e_q^2, \quad e_q = \text{carica quark in unita' } e$$

Tenuto conto del fatto che i quark sono contenuti negli adroni, entro i quali non hanno un solo valore di impulso, la sez. d'urto di cui sopra si puo' riscrivere come sez. d'urto differenziale:

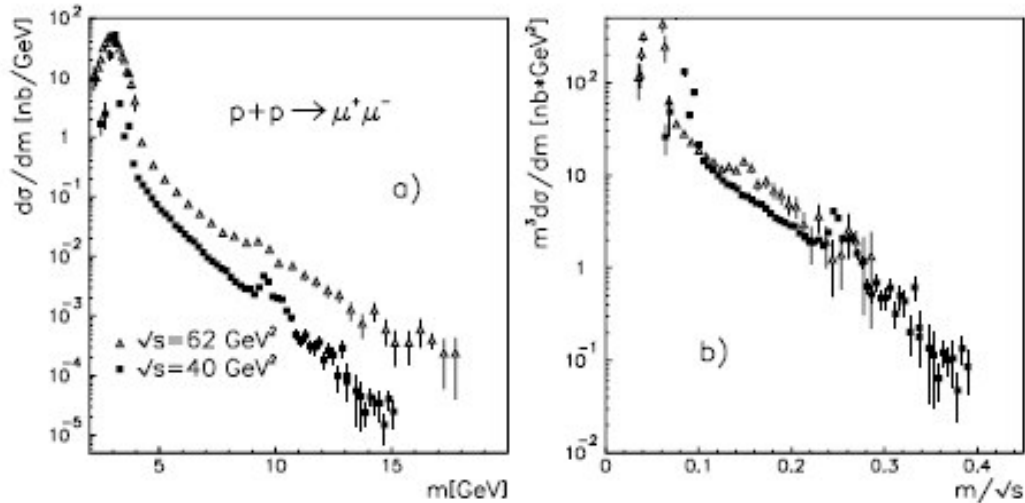
$$\frac{d\sigma(q\bar{q} \rightarrow l^+l^-)}{dq^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2} e_q^2 \delta(q^2 - s_{q\bar{q}})$$

$$s_{q\bar{q}} = (p_q + p_{\bar{q}})^2 = (xp_1 + yp_2)^2 \simeq xys$$

Nell'approssimazione del modello a partoni, le frazioni di impulso di quark e antiquark, x e y , sono date dalle funzioni di struttura del nucleoni, familiari dal DIS. Se ora vogliamo la sez. d'urto differenziale per produzione di coppie da urti protone-protone, abbiamo:

$$\frac{d\sigma(pp \rightarrow l^+l^-)}{dq^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{3} \underbrace{\sum_{\text{medie su stati di colore iniziali}}}_{\text{somma su stati a colore nullo}} \sum_{\text{quark}} \int dx \int dy \frac{d\sigma(q\bar{q} \rightarrow l^+l^-)}{dq^2} \underbrace{f_q(x)}_{\text{distrib. in } x \text{ quark}} \underbrace{f_{\bar{q}}(y)}_{\text{distrib. in } y \text{ antiquark}}$$

Il modello a partoni puro e semplice prevede che la funzione $q^4(d\sigma/dq^2)$ scali nella quantita' q^2/s , come si osserva approssimativamente nel grafico:

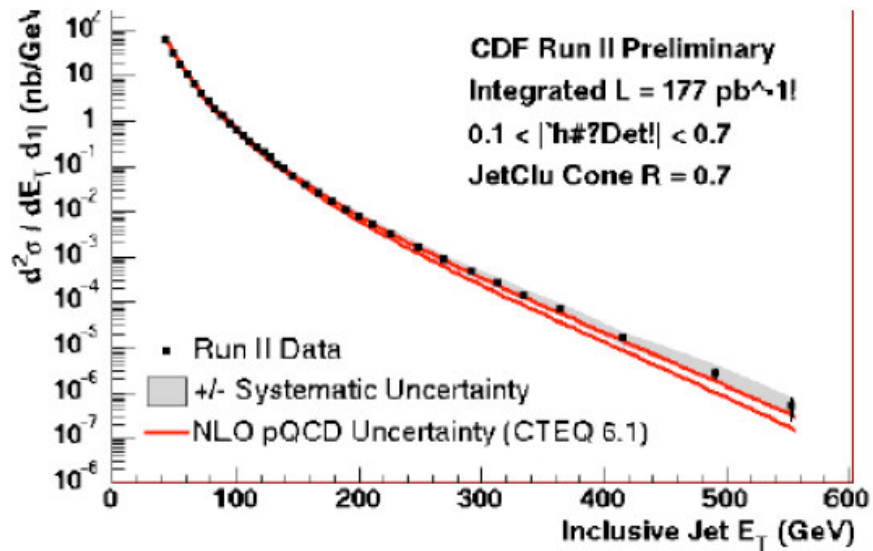


Se si escludono le zone dei picchi attorno a 3-4 GeV e 9.5-11 GeV, che corrispondono alla produzione di stati legati $c\bar{c}, b\bar{b}$, si vede che lo spettro di massa invariante scala alle due diverse energie. Anche in questo caso la QCD prevede correzioni allo scaling, risultato consistente con i dati sperimentali.

Jets nelle collisioni adrone-adrone

Una volta accettato che la struttura a jets e' il risultato della collisione/adronizzazione dei costituenti, non e' difficile immaginare che lo stesso fenomeno deve manifestarsi anche nelle collisioni fra adroni, senza vertici elettromagnetici. Cosi' e' infatti, quando si considerano urti sufficientemente energetici da avvicinarsi al regime di liberta' asintotica: il primo indizio di struttura a jets in interazioni adroniche fu osservato agli anelli di accumulazione protone-protone ISR al CERN, dopo la meta' degli anni '70; successivamente il fenomeno fu osservato molto piu' agevolmente al collider *SppS* del CERN e al *Tevatron* di Fermilab.

L'identificazione sperimentale dei jets in collisioni adroniche poggia principalmente sulla osservazione di eventi con alta energia trasversa rispetto alla direzione dei fasci.. Le proprieta' dell'interazione di colore rendono pero' improbabile il caso in cui una singola traccia viene emessa ad alto impulso trasverso, e richiedono che il trigger dell'esperimento sia basato invece sull'energia trasversa osservata in un sistema "calorimetrico" basato sulla quantita' $\sum p_{\perp}^{(i)} = \sum p_i \sin \theta_i \sim \sum E_T^{(i)}$.



La descrizione di questi processi e' piu' complicata del caso Drell-Yan, a causa della presenza di diversi tipi di vertici QCD ; limitandosi ai soli diagrammi a un gluone si devono considerare i processi

$$qq \rightarrow qq$$

$$q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$$

$$qg \rightarrow qg$$

$$\bar{q}g \rightarrow \bar{q}g$$

$$gg \rightarrow gg$$

che ci si attende si manifestino come eventi a 2 jets. Per ognuno di essi, la sezione d'urto differenziale si scrive:

$$\frac{d\sigma}{d(\cos\theta)} = \frac{\pi\alpha_s^2}{2s_{ij}} |M|^2$$

$$s_{ij} = (x_i p_i + x_j p_j)^2 \approx x_i x_j s$$

in cui l'elemento di matrice e' diverso caso per caso, ma risulta, a piccoli angoli, sempre dominato da un termine $\propto \sin^{-4}(\theta/2)$. Questo andamento "alla Rutherford" e' ben verificato, cosi' come l'effetto delle correzioni QCD .

Nel 10-20 % dei casi, l'interazione ad alta energia trasversa contiene 3 jets., che sono dovuti a fenomeni "radiativi" di QCD (chiamati collettivamente QCD single bremsstrahlung), nei quali si verifica l'emissione di un gluone in piu'. Il rapporto fra i rates di eventi a 3 e a 2 jets fornisce una misura (un po' cruda) di α_s .

11. QCD non perturbativa: potenziale efficace, calcoli su reticolo

Abbiamo visto che l'elemento di matrice invariante per l'interazione quark-antiquark e quark-quark ha un limite statico analogo al potenziale coulombiano, nel quale compare il fattore di colore relativo allo stato di colore totale coinvolto. Il senso del limite citato e' quello di rappresentare una buona approssimazione perturbativa del potenziale di colore, valida per processi a piccola distanza, o grande q^2 ; occorre per altro ricordare che la costante di accoppiamento aumenta all'aumentare della distanza stessa. Interazioni a piccolo q^2 quindi richiedono per essere descritte un elemento aggiuntivo al potenziale coulombiano. Esso viene di solito introdotto sotto forma di un termine confinante, p.es. crescente linearmente con r :

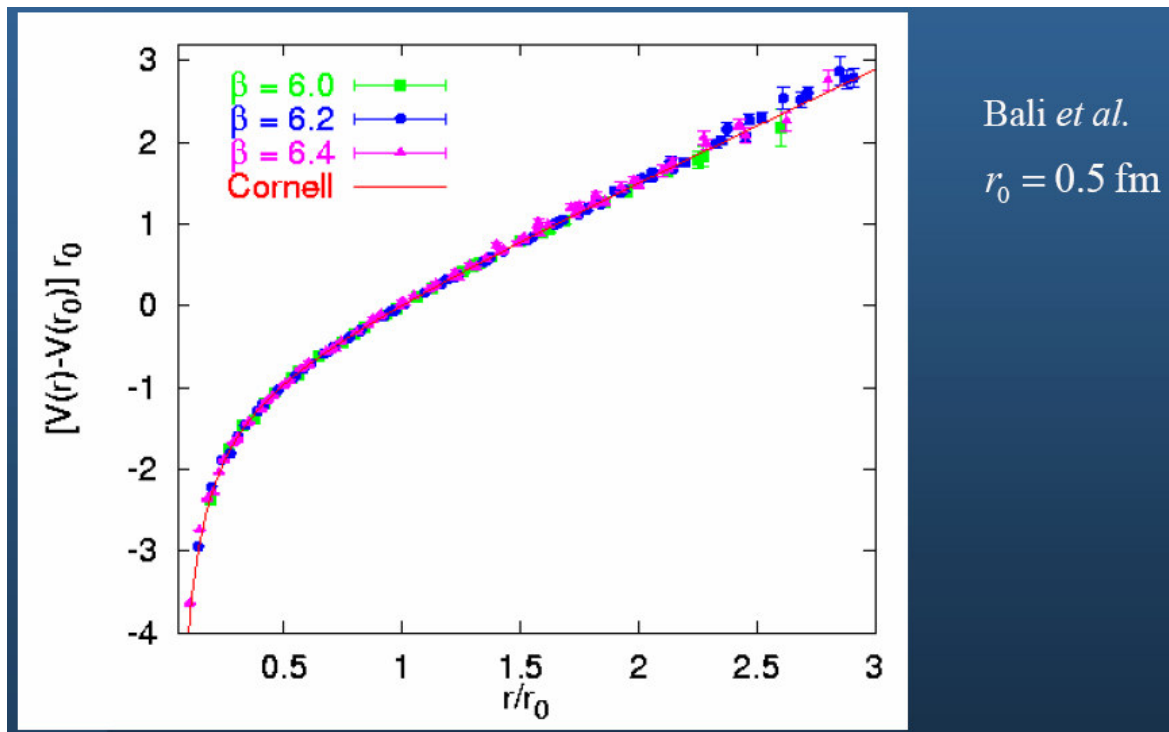
$$V_c(r) = ar$$

che ha natura puramente fenomenologica. In questo modo, a bassa energia un'approssimazione per il potenziale fra due cariche di colore si puo' scrivere:

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + ar$$

A questa espressione dovrebbero essere poi aggiunti termini correttivi, analoghi a quelli di spin-orbita, spin-spin etc presenti nell'hamiltoniano di Breit-Fermi per il positronio, nonche' le correzioni per il moto interamente o semi-relativistico dei quark, se non sono quelli piu' pesanti. Per un certo tempo, lo studio di questi effetti ha costituito la parte centrale dell'attivita' di chi studiava, teoricamente e sperimentalmente, il quarkonio. Tuttavia, il potere predittivo delle diverse possibili approssimazioni e' risultato finora piuttosto limitato.

Un approccio completamente diverso al problema del calcolo degli stati legati (masse, momenti magnetici, larghezze totali etc per mesoni e barioni) e' quello della cosiddetta QCD su reticolo. Il reticolo e' un insieme di punti nello spazio-tempo, equispaziati a una lunghezza fissa a , e le ampiezze vengono calcolate in modo discretizzato sui punti stessi. Contrariamente a quella che puo' essere un'impressione superficiale, il metodo non consiste semplicemente nel sostituire algoritmi numerici a calcoli analitici che non si sanno fare, ma ha profonde implicazioni di principio e stretti legami con la meccanica statistica. In anni recenti, molti risultati di primo piano sono stati ottenuti con questo metodo, a volte tramite l'uso di sistemi di calcolo con h/ware e s/ware specializzati per quest'uso. Un esempio e' il calcolo su reticolo del potenziale approssimato fra due quark, il cui risultato e' mostrato nella figura:



che mostra come l'approssimazione *coulomb + lineare* sia giustificata.