Fattore densita' degli stati

Si possono fare un paio di esempi per chiarire il significato del fattore densita' degli stati.

1. Atomo di idrogeno in un "condensatore"

Si consideri un atomo di idrogeno nello stato fondamentale, posto all'interno di un grande condensatore piano, collegato ad un generatore di tensione alternata ad alta frequenza ω . Questo modo di descrivere la situazione e' in realta' una semplificazione dell'interazione dell'atomo con un'onda piana.

Se E_I e' l'energia di ionizzazione dell'atomo, possono presentarsi 2 situazioni:

a. $\hbar\omega < E_I$ In questo caso l'atomo non puo' essere ionizzato, e quel che si puo' calcolare e' l'ampiezza di transizione fra lo stato fondamentale e uno degli stati eccitati, che appartengono ad un insieme discreto. L'espressione per l'elemento di matrice di transizione al I ordine in questo caso si scrive:

$$T_{fi} = \langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle$$

Essendo l'ampiezza di transizione al I ordine data da

$$a_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \langle \psi_f | H'(t') | \psi_i \rangle e^{i\omega_f t'} dt'$$

specifichiamo l'hamiltoniano di interazione come

$$\langle \psi_f | H'(t) | \psi_i \rangle = 2 \langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle \sin \omega t$$

Risulta in questo caso, se il generatore e' acceso all'istante $t=0$ e spento all'istante $t=t_0$:

$$\begin{aligned} a_f^{(1)}(t > t_0) &= \frac{i}{\hbar} \int_0^{t_0} 2 \langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle \sin \omega t' e^{i\omega_f t'} dt' \\ &= \frac{i}{\hbar} \langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle \left[\frac{e^{i(\omega_f + \omega)t_0} - 1}{\omega_{if} + \omega} - \frac{e^{i(\omega_f - \omega)t_0} - 1}{\omega_{if} - \omega} \right] \end{aligned}$$

Se $E_f - E_i > 0$, solo il II termine e' importante, e la probabilita' di transizione da $|i\rangle$ a $|f\rangle$ e':

$$|a_f^{(1)}(t > t_0)|^2 = \frac{4}{\hbar^2} |\langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle|^2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\omega_{if} - \omega)t_0}{(\omega_{if} - \omega)^2}$$

In questo caso, in cui lo stato finale appartiene ad un insieme discreto, la probabilità di transizione oscilla nel tempo, in funzione della durata della perturbazione, con la *frequenza di battimento* (differenza fra la frequenza della perturbazione e quella naturale della transizione).

b. $\hbar\omega > E_i$ In questo caso l'atomo può venire ionizzato, e lo stato finale appartiene ad un insieme continuo, a causa dei gradi di libertà continui per l'elettrone staccato dal protone. Possiamo nondimeno ricondurci a un caso semi-discreto se immaginiamo di racchiudere il sistema in un grande volume cubico, di lato L . In esso gli stati di impulso (o numero d'onda) per l'elettrone libero dovranno soddisfare le condizioni

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, k_y, k_z \text{ simili}$$

e saranno quindi discretizzati. Se L è grande i valori possibili di k_x costituiscono una successione molto fitta, e si può trattare la quantità discreta n_x come se fosse continua:

$$dn_x = \frac{L}{2\pi} dk_x \text{ e simili}$$

$$\rightarrow dn_x dn_y dn_z = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 dk_x dk_y dk_z$$

Quindi, nell'elemento di volume nello spazio degli impulsi sta il numero di stati (senza contare i gradi di libertà di spin):

$$dn \equiv \frac{dn}{d^3\mathbf{k}} d^3\mathbf{k} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 d^3\mathbf{k}$$

D'altra parte, in questo esempio quel che si può calcolare è la probabilità di transizione verso un gruppo di stati, p.es. quelli nei quali l'elettrone esce dal processo con numero d'onda che sta nell'elemento di volume $d^3\mathbf{k}$ nello spazio degli impulsi: questo perché lo stato finale appartiene effettivamente ad un continuo, e per un valore fissato di energia ci sono molti stati possibili per l'elettrone. Quindi la probabilità di transizione, che in questo caso è verso un gruppo di stati, e non verso

uno stato particolare, e' da intendersi *come una quantita' differenziale nel numero di stati*:

$$d|a_f|^2 = \frac{4}{\hbar^2} \left| \langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle \right|^2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\omega_{if} - \omega)t_0}{(\omega_{if} - \omega)^2} dn \text{ prob. di transizione}$$

$$\rightarrow dw \approx \frac{4}{\hbar^2} \left| \langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle \right|^2 \delta(\omega_f - \omega_i - \omega) dn \text{ prob. di transizione per unita' di tempo}$$

dw si ottiene da $d|a_f|^2$ usando la δ come limite della funzione oscillante per grandi t_0 ; la funzione δ descrive la conservazione dell'energia fra sistema e perturbazione (c. elettrico nel condensatore). Si osservi che vale la relazione

$$\omega_{if} = \omega_f - \omega_i = \frac{E_f - E_i}{\hbar} = \frac{E - E_i}{\hbar}$$

Data l'espressione trovata prima per dn , questo si puo' riscrivere:

$$d|a_f|^2 = \frac{4}{\hbar^2} \left| \langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle \right|^2 \delta(E - E_i - \hbar\omega) \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 d^3\mathbf{k}$$

ed essendo energia e impulso dell'elettrone legati dalla relazione:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E \rightarrow k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \rightarrow dk = \sqrt{\frac{m}{2\hbar^2 E}} dE$$

si ha:

$$d^3\mathbf{k} = k^2 dk d\Omega = \frac{2mE}{\hbar^2} dk d\Omega$$

$$\rightarrow d|a_f|^2 = \frac{4}{\hbar^2} \left| \langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle \right|^2 \delta(E - E_i - \hbar\omega) \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \frac{2mE}{\hbar^2} \sqrt{\frac{m}{2\hbar^2 E}} dE d\Omega$$

$$\rightarrow d|a_f|^2 = \frac{4}{\hbar^2} \left| \langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle \right|^2 \delta(E - E_i - \hbar\omega) \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \sqrt{\frac{2m^3 E}{\hbar^6}} dE d\Omega$$

Per avere una probabilita' di transizione finita dovremmo ora, ovviamente, integrare su un range finito di energia e di angolo solido dell'elettrone: questo mostra che la divergenza dell'espressione, dovuta alla presenza della δ , e' solo apparente, visto che le δ stessa e' "mangiata" dall'integrale sull'energia. L'altro dubbio che puo' rimanere, ossia la dipendenza apparente dal volume di quantizzazione L^3 , si risolve osservando

che tale fattore si cancella con la normalizzazione della funzione d'onda nell'elemento di matrice.

Se ci chiedessimo, alla fine di tutto questo, qual e' la distribuzione statistica dell'energia dell'elettrone, dovremmo osservare che, evidentemente, essa dipende dall'elemento di matrice, che qui non abbiamo esplorato. In assenza di ogni informazione sulla forma dell'elemento di matrice stesso, la cosa piu' semplice e' supporre che sia una costante, indipendente da E: in questo caso, *la distribuzione statistica sarebbe fissata dal solo fattore densita' degli stati, o spazio delle fasi*:

$$d|a_f|^2 = K\delta(E - E_i - \hbar\omega)\sqrt{\frac{2m^3 E}{\hbar^6}}dEd\Omega$$

$$\rightarrow |a_f|^2 = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} K\delta(E - E_i - \hbar\omega)\sqrt{\frac{2m^3 E}{\hbar^6}}dEd\Omega$$

$$\rightarrow |a_f|^2 = 4\pi K\sqrt{\frac{2m^3 (E_i + \hbar\omega)}{\hbar^6}}$$

2. Stato a finale a 2 corpi (non relativistico)

Consideriamo il caso in cui nello stto finale siano presenti due particelle libere, di impulsi $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$: allora avremo

$$dn = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \frac{L^3}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2$$

$$\rightarrow dn = \frac{V^2}{(2\pi)^6} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2$$

Volendo dn/dE , osserviamo che:

$$E = \frac{k_1^2}{2m_1} + \frac{k_2^2}{2m_2} \rightarrow \frac{k_1}{m_1} dk_1 = dE \rightarrow \frac{dk_1}{dE} = \frac{m_1}{k_1}$$

Quindi, procedendo come nel caso precedente:

$$dn = \frac{V^2}{(2\pi)^6} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 = \frac{V^2}{(2\pi)^6} k_1^2 dk_1 d\Omega_1 k_2^2 dk_2 d\Omega_2$$

$$\rightarrow dn = \frac{V^2}{(2\pi)^6} k_1^2 \frac{dk_1}{dE} dE d\Omega_1 k_2^2 dk_2 d\Omega_2$$

$$\rightarrow \frac{dn}{dE} = \frac{V^2}{(2\pi)^6} k_1^2 \frac{m_1}{k_1} dE d\Omega_1 k_2^2 dk_2 d\Omega_2 = \frac{V^2}{(2\pi)^6} k_1 m_1 dE d\Omega_1 k_2^2 dk_2 d\Omega_2$$

$$\rightarrow \frac{dn}{dE} = \frac{V^2}{(2\pi)^6} \sqrt{2m_1 E - p_2^2} \frac{m_1}{m_2} dE d\Omega_1 k_2^2 dk_2 d\Omega_2$$

Qui non ci siamo preoccupati dell'elemento di matrice, ma solo dal fattore densità degli stati: questo dovrebbe aiutare a capire il significato del fattore stesso, che in pratica serve a misurare di quanto cresce il numero di stati che ha a disposizione il sistema all'aumentare dell'energia totale