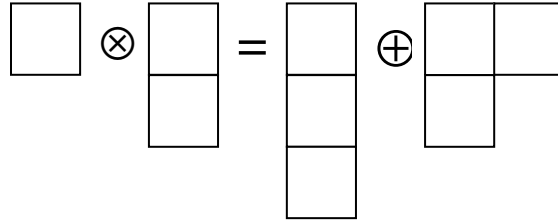


Nota sulle proprietà di simmetria dei diagrammi di Young

Nella scomposizione in rapp. irr. del prodotto tensoriale di $SU(3)_C$

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$$

compaiono un singoletto e un ottetto. Usando la tecnica dei diagrammi di Young, si può scrivere la scomposizione come



Le proprietà di simmetria delle rapp. irr. ottenute si deducono dalla forma del diagramma di Young corrispondente; questa proprietà si applica normalmente al caso in cui il prodotto tensoriale sia realizzato fra n copie (p.es. 2) di una stessa rappresentazione, con gli stati risultanti composti quindi da n particelle identiche, e non al caso del prodotto tensoriale fra rappresentazioni diverse e non equivalenti, come quello considerato. Se si insiste nondimeno a mantenere, per questo caso, la stessa interpretazione per le proprietà di simmetria rispetto a scambio, come se particelle e antiparticelle fossero identiche, risulta dai diagrammi di Young che 1 dovrebbe essere antisimmetrica, mentre 8 non ha simmetria definita. Se si esamina la funzione d'onda di colore corrispondente, la proprietà non è immediatamente apparente:

$$1: \psi = \frac{1}{\sqrt{3}} (r(1)\bar{r}(2) + g(1)\bar{g}(2) + b(1)\bar{b}(2))$$

Lo scambio non sembra godere di proprietà di simmetria, perché

$$\frac{1}{\sqrt{3}} (r(1)\bar{r}(2) + g(1)\bar{g}(2) + b(1)\bar{b}(2)) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} (\bar{r}(1)r(2) + \bar{g}(1)g(2) + \bar{b}(1)b(2))$$

che non ha una relazione particolare con lo stato di partenza.

Si può però riottenere la simmetria corretta se si assume la seguente regola per gli stati colore-anticolore

$$c(i)\bar{c}(j) = -\bar{c}(j)c(i)$$

Infatti:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}) \xrightarrow{\text{scambio}} \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{r}r + \bar{g}g + \bar{b}b) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-r\bar{r} - g\bar{g} - b\bar{b}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b})$$

che mostra come, rispetto alla regola citata sopra, lo stato sia effettivamente antisimmetrico per scambio.

La regola citata e' in realta' ragionevolmente giustificata dall'interpretazione usuale degli stati di anticolore come stati di *antiparticella*: in questo senso, infatti:

$$\bar{c}c \propto a^\dagger(c)b^\dagger(c)|0\rangle = -b^\dagger(c)a^\dagger(c)|0\rangle \propto -\bar{c}c$$

come conseguenza delle relazioni di anticommutazione degli operatori di creazione per fermioni e antifermioni.

Estendere il principio di Pauli a sistemi contenenti particelle e antiparticelle puo' sembrare arbitrario, tuttavia va ricordato che, in una teoria relativistica, particelle e antiparticelle di un dato tipo sono effettivamente considerati come *diversi stati* dell'unico campo di cui le particelle/antiparticelle sono i quanti: basta pensare alle soluzioni dell'equazione di Dirac per convincersene. Alla luce di questa osservazione, l'estensione appare piuttosto ragionevole.