Reazioni a 2 corpi nel CM e nel LAB

La reazione generica che consideriamo e'

$$1+2 \to 3+4$$

Assumiamo che 1 sia il proiettile, e 2 il bersaglio, fermo nel LAB. β e' la velocita' del CM nel LAB, che si puo' scrivere:

$$\beta = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1 + m_2} \quad \text{Impulso totale/En. totale iniziale}$$

$$\gamma = \frac{E_1 + m_2}{\sqrt{s}} = \frac{E_1 + m_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2}} \quad \text{En. totale/Massa invariante iniziale}$$

ricordando che, visto nel LAB, il sistema delle 2 particelle iniziali si comporta come una "particella" con massa = massa invariante (= en. totale nel CM), impulso = impulso totale nel LAB, energia = en. totale nel LAB. Queste 3 quantita' sono conservate nella collisione, quindi sono le stesse per il sistema delle 2 particelle finali

1. Calcoliamo prima le quantita' nel CM: Si procede come nel decadimento a 2 corpi di una particella di massa $\sqrt{s}$, trovando:

$$E^{*(3,4)} = \frac{\sqrt{s} + m_{3,4}^2 - m_{4,3}^2}{2\sqrt{s}}$$

$$p^* = \frac{\sqrt{s}}{2}\sqrt{\left[1-\left(\frac{m_3+m_4}{\sqrt{s}}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{m_3-m_4}{\sqrt{s}}\right)^2\right]}$$

Le quantita' nel LAB si ottengono con la trasformazione di Lorentz di quelle nel CM, oppure direttamente dalla conservazione del 4-impulso nel LAB. Consideriamo il 4-impulso di uno dei prodotti di uno scattering nel CM:

$$\left(E^{*(3)}, p_\perp^*, p_\parallel^*\right)$$

La seconda particella avra' 4-impulso:

$$\left(E^{*(4)}, -p_{\perp}^{*}, -p_{\parallel}^{*}\right)$$

I segni opposti di $p_{\perp}$, $p_{//}$ per 3 e 4, nel CM, indicano che gli angoli azimutali dei due impulsi differsicono di π, mentre quelli polari sono supplementari.

2. La trasformazione di Lorentz che lega le componenti nel CM a quelle nel LAB e':

$$\begin{aligned}
&\pm p_{\perp} = \pm p_{\perp}^{*} \\
&p_{\parallel}^{(3,4)} = \gamma\left(\pm p_{\parallel}^{*} + \beta E^{*(3,4)}\right) \\
&E^{(3,4)} = \gamma\left(E^{*(3,4)} + \beta\left(\pm p_{\parallel}^{*}\right)\right)
\end{aligned}$$

Il risultato, qualunque sia il metodo adottato, per le componenti nel LAB in termini di quelle nel CM, si trova:

$$E^{(3)} = \frac{E_1 + m_2}{2}\left(1 + \frac{m_3^2 - m_4^2}{s}\right) + \frac{|\mathbf{p}_1|}{2}\sqrt{\left[1 - \left(\frac{m_3 + m_4}{\sqrt{s}}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{m_3 - m_4}{\sqrt{s}}\right)^2\right]}\cos\theta^*$$

$$E^{(4)} = \frac{E_1 + m_2}{2}\left(1 + \frac{m_4^2 - m_3^2}{s}\right) - \frac{|\mathbf{p}_1|}{2}\sqrt{\left[1 - \left(\frac{m_3 + m_4}{\sqrt{s}}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{m_4 - m_3}{\sqrt{s}}\right)^2\right]}\cos\theta^*$$

$$\begin{cases}
\tan\theta_3 = \dfrac{\sqrt{s}\sin\theta^*}{\left(E_1 + m_2\right)\left(\alpha_3 + \cos\theta^*\right)} \\
\tan\theta_4 = \dfrac{\sqrt{s}\sin\theta^*}{\left(E_1 + m_2\right)\left(\alpha_4 - \cos\theta^*\right)}
\end{cases} ; \alpha_{3,4} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1 + m_2}\frac{1 + \dfrac{\pm m_3^2 \mp m_4^2}{s}}{\sqrt{\left[1 - \left(\dfrac{m_3 + m_4}{\sqrt{s}}\right)^2\right]\left[1 - \left(\dfrac{m_4 - m_3}{\sqrt{s}}\right)^2\right]}}$$

Gli impulsi si possono naturalmente trovare dalle energie.
Si puo' osservare che anche in questo caso si presentano situazioni diverse a seconda del valore di α:

- $\alpha>1$: esiste un angolo max nel LAB $\theta_{max} < \pi$
- $\alpha<1$: $\theta_{max} = \pi$
- $\alpha=1$: caso limite fra i precedenti $\theta_{max} = \pi/2$

Consideriamo ora il caso particolare dello scattering elastico, con la scelta: $m_3 = m_1, \;\; m_4 = m_2$. Abbiamo allora le espressioni semplificate:

$$E^{(3)} = \frac{E_1 + m_2}{2}\left(1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{s}\right) + \frac{|\mathbf{p}_1|}{2}\sqrt{\left[1 - \left(\frac{m_1 + m_2}{\sqrt{s}}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{\sqrt{s}}\right)^2\right]}\cos\theta^*$$

$$E^{(4)} = \frac{E_1 + m_2}{2}\left(1 + \frac{m_2^2 - m_1^2}{s}\right) - \frac{|\mathbf{p}_1|}{2}\sqrt{\left[1 - \left(\frac{m_1 + m_2}{\sqrt{s}}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{m_2 - m_1}{\sqrt{s}}\right)^2\right]}\cos\theta^*$$

$$\begin{cases} \tan\theta_3 = \dfrac{\sqrt{s}\sin\theta^*}{(E_1 + m_2)(\alpha_3 + \cos\theta^*)} \\ \tan\theta_4 = \dfrac{\sqrt{s}\sin\theta^*}{(E_1 + m_2)(\alpha_4 - \cos\theta^*)} \end{cases} ; \alpha_{3,4} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1 + m_2}\frac{1 + \dfrac{\pm m_1^2 \mp m_2^2}{s}}{\sqrt{\left[1 - \left(\dfrac{m_1 + m_2}{\sqrt{s}}\right)^2\right]\left[1 - \left(\dfrac{m_2 - m_1}{\sqrt{s}}\right)^2\right]}}$$

Come caso particolarmente particolare, si puo' considerare quello in cui lo scattering elastico avviene fra particelle di massa eguale: $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$

Si trova:

$$E^{(3)} = \frac{E_1 + m}{2} + \frac{|\mathbf{p}_1|}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{2m}{\sqrt{s}}\right)^2}\cos\theta^* = \frac{E_1 + m}{2} + \frac{|\mathbf{p}_1|}{2}\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}$$

$$E^{(4)} = \frac{E_1 + m}{2} - \frac{|\mathbf{p}_1|}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{2m}{\sqrt{s}}\right)^2}\cos\theta^* = \frac{E_1 + m}{2} - \frac{|\mathbf{p}_1|}{2}\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}$$

$$\begin{cases} \tan\theta_3 = \dfrac{\sqrt{s}\sin\theta^*}{(E_1 + m)(\alpha_3 + \cos\theta^*)} \\ \tan\theta_4 = \dfrac{\sqrt{s}\sin\theta^*}{(E_1 + m)(\alpha_4 - \cos\theta^*)} \end{cases} ; \alpha_{3,4} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1 + m}\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{2m}{\sqrt{s}}\right)^2}} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1 + m}\sqrt{\frac{s}{s - 4m^2}}$$

In questo caso:

$$\sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2} = \sqrt{2m^2 + 2E_1 m} = \sqrt{2m}\sqrt{m + E_1}$$

$$\to \alpha_{3,4} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1 + m}\sqrt{\frac{s}{s - 4m^2}} = \frac{\sqrt{2m}\,|\mathbf{p}_1|}{\sqrt{E_1 + m}}\sqrt{\frac{2m(m + E_1)}{2m^2 + 2E_1 m - 4m^2}} = \frac{\sqrt{2m}\,|\mathbf{p}_1|}{\sqrt{E_1 - m}}$$

Quindi:

$$E^{(3)} = \frac{E_1+m}{2} + \frac{|\mathbf{p}_1|}{2}\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}\cos\theta^* = \frac{E_1+m}{2} + \frac{|\mathbf{p}_1|}{2}\sqrt{1-\frac{4m^2}{2m(m+E_1)}}\cos\theta^*$$

$$E^{(4)} = \frac{E_1+m}{2} - \frac{|\mathbf{p}_1|}{2}\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}\cos\theta^* = \frac{E_1+m}{2} - \frac{|\mathbf{p}_1|}{2}\sqrt{1-\frac{4m^2}{2m(m+E_1)}}\cos\theta^*$$

$$\alpha_{3,4} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1+m}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2m}{\sqrt{s}}\right)^2}} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1+m}\sqrt{\frac{(m+E_1)}{E_1-m}} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{\sqrt{E_1^2-m^2}} = 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} \tan\theta_3 = \dfrac{\sqrt{s}\sin\theta^*}{(E_1+m)(1+\cos\theta^*)} = \dfrac{\sqrt{s}}{(E_1+m)}\dfrac{\sin\theta^*/2}{\cos\theta^*/2} = \dfrac{\sqrt{s}}{(E_1+m)}\tan\theta^*/2 \\ \tan\theta_4 = \dfrac{\sqrt{s}\sin\theta^*}{(E_1+m)(1-\cos\theta^*)} = \dfrac{\sqrt{s}}{(E_1+m)}\cot\theta^*/2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \tan\theta^*/2 = \dfrac{(E_1+m)}{\sqrt{s}}\tan\theta_3 \\ \cot\theta^*/2 = \dfrac{(E_1+m)}{\sqrt{s}}\tan\theta_4 = \dfrac{1}{\tan\theta^*/2} \rightarrow \tan\theta^*/2 = \dfrac{\sqrt{s}}{E_1+m}\dfrac{1}{\tan\theta_4} \end{cases}$$

$$\rightarrow \tan\theta_3\tan\theta_4 = \frac{s}{(E_1+m)^2} = \frac{2m}{E_1+m}$$

Si osservi che nel limite non relativistico

$$E_1 \sim m$$

$$\rightarrow \tan\theta_3\tan\theta_4 = \frac{2m}{E_1+m} \approx 1 \rightarrow \tan\theta_3 \approx \frac{1}{\tan\theta_4} \rightarrow \theta_3+\theta_4 \approx \frac{\pi}{2}$$