

Argomento teorico per la corrente di spostamento:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad \text{legge di Ampere}$$

$$\rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

D'altra parte:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

\rightarrow Legge di Ampere + Eq. di continuita':

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

\rightarrow Legge di Ampere vale in condizioni stazionarie

(\leftarrow Senza accumulo di cariche)

Modifica di Maxwell della legge di Ampere:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \left(\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \left(\nabla \cdot \mathbf{j} + \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

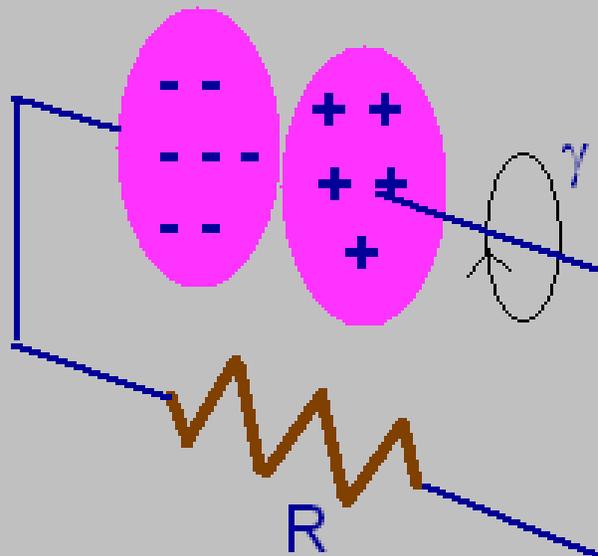
$$\rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot \left(\mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

$$\rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Esempio: condensatore che si scarica e legge di Ampere

Corrente di spostamento - 1

Condensatore che si scarica

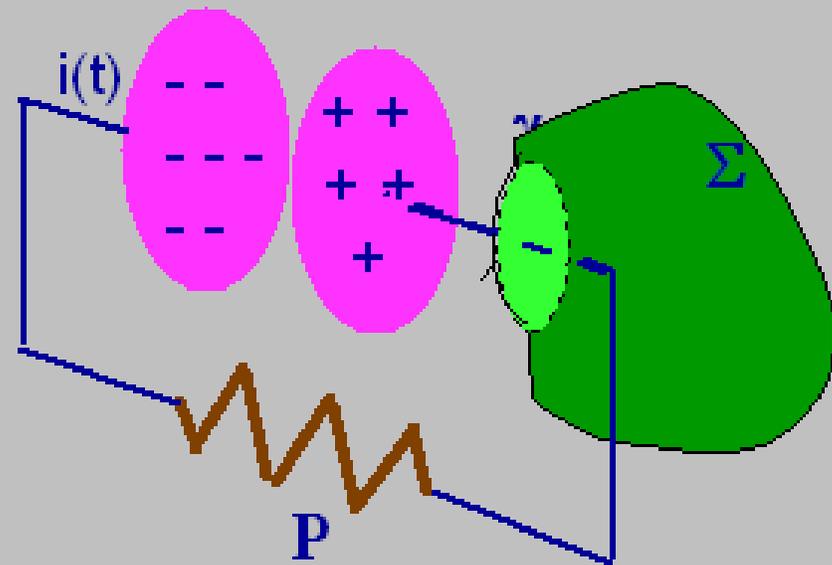


$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$

Quindi: c.magnetico in tutto lo spazio

$$\left. \begin{array}{l} \oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i \neq 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \neq 0 \end{array} \right\} \text{per i punti lungo il filo}$$

Corrente di spostamento - 2

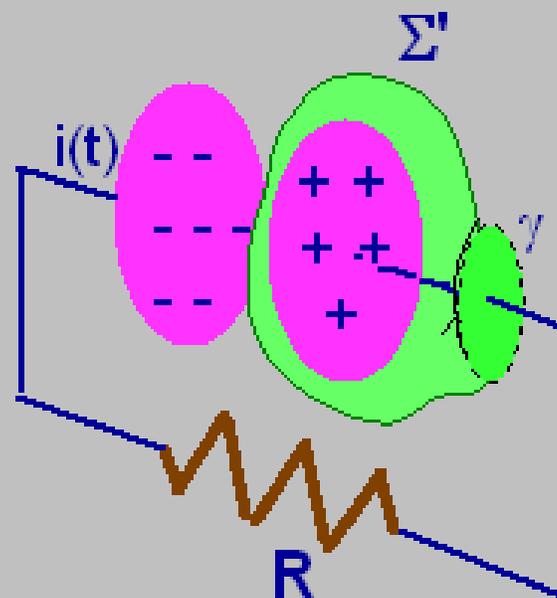


Teorema del rotore:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \neq 0$$

$$\rightarrow \oiint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A} = \oiint_{\Sigma} \mu_0 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 i \neq 0$$

Corrente di spostamento - 3



Se uso la superficie Σ' invece di Σ ,
contraddizione:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \neq 0$$

$$\oiint_{\Sigma'} \mu_0 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = 0 \leftarrow \text{no corrente nel condensatore}$$

Due possibilita':

a) *la carica non si conserva*

b) *la legge di Ampere e' incompleta*

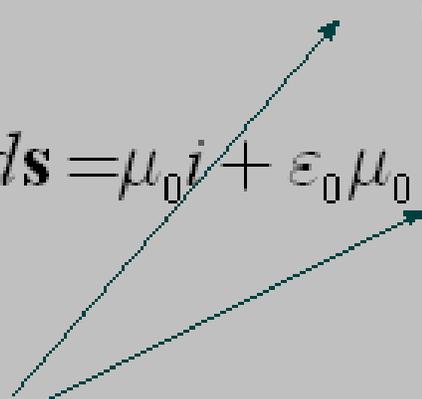
Corrente di spostamento - 4

Maxwell:

la carica e' sempre conservata

Modifica legge di Ampere:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \Phi_S(\mathbf{E})}{\partial t}$$


Nuovo termine, chiamato in origine
corrente di spostamento

In realta': nessun moto di cariche,
nessuna corrente (ha solo le
dimensioni e gli effetti di una corrente)

Equazioni di Maxwell

Forma
differenziale

Forma integrale

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oiint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\oiint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial \Phi_s(\mathbf{B})}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_s(\mathbf{E})}{\partial t}$$

Insieme a equazione della forza:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

contengono tutto l'elettromagnetismo

Conservazione della carica

Da equazioni di Maxwell:
prendiamo la divergenza della IV
equazione:

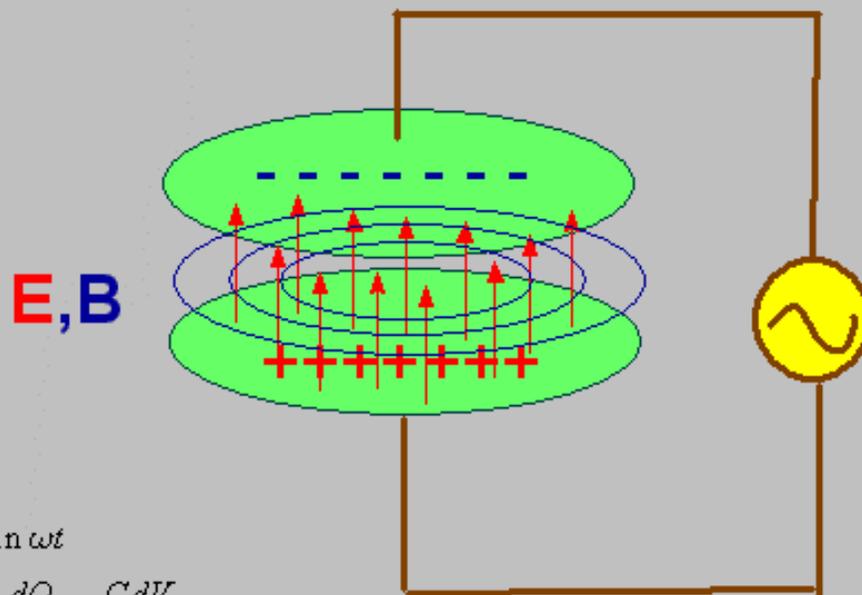
$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) &= \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{j}) + \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ \rightarrow 0 &= \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{j}) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t}\end{aligned}$$

Usando la I equazione:

$$\begin{aligned}(\nabla \cdot \mathbf{j}) + \varepsilon_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t} &= 0 \\ \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

Equazione di continuita': la carica e'
conservata

Campo magnetico in un condensatore con d.d.p. alternata



$$V_c = V_0 \sin \omega t$$

$$\rightarrow i_{cond} = \frac{dQ}{dt} = \frac{CdV_c}{dt} = \omega CV_0 \cos \omega t$$

$$\rightarrow \oint_{\Gamma'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \omega CV_0 \cos \omega t \quad \Gamma' \text{ cerchio attorno al filo}$$

$$\mathbf{E} = \frac{V_c}{d} = \frac{V_0}{d} \sin \omega t \rightarrow \Phi_s(\mathbf{E}) = \frac{V_0}{d} \sin \omega t \pi r^2$$

$$\rightarrow i_{spost} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_s(\mathbf{E})}{dt} = \omega \epsilon_0 \frac{V_0}{d} \cos \omega t \pi r^2$$

$$\rightarrow \oint_{\Gamma''} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \pi r^2 \omega \epsilon_0 \frac{V_0}{d} \cos \omega t \quad \Gamma'' \text{ cerchio concentrico alle piastre}$$

Γ' cerchio attorno al filo, raggio r : \mathbf{B} tangenziale

$$B 2\pi r = \mu_0 \omega CV_0 \cos \omega t \rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi r} \omega CV_0 \cos \omega t$$

Γ'' cerchio concentrico alle piastre, raggio r : \mathbf{B} tangenziale

$$\rightarrow i_{spost} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_{s''}(\mathbf{E})}{dt} = \epsilon_0 \pi r^2 \omega \frac{V_0}{d} \cos \omega t$$

$$B 2\pi r = \mu_0 \epsilon_0 \pi r^2 \omega \frac{V_0}{d} \cos \omega t \rightarrow B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{r}{2} \omega \frac{V_0}{d} \cos \omega t$$

Confronto fra corrente di conduzione e corrente di spostamento

1) Nel filo c'è *anche* una corrente di spostamento! Infatti:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Ma essa è quasi sempre trascurabile:

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}_{filo} \rightarrow \mathbf{E}_{filo} = \frac{\mathbf{J}_{cond}}{\sigma} \rightarrow \Phi(\mathbf{E}_{filo}) = \frac{\mathbf{J}_{cond} A}{\sigma} = \frac{i_{cond}}{\sigma}$$

$$\rightarrow i_{spost}(filo) = \frac{\epsilon_0}{\sigma} \frac{di_{cond}}{dt} = \frac{\epsilon_0}{\sigma} (-C\omega^2 V_0 \sin \omega t)$$

$$\rightarrow \frac{|i_{spost}(filo)|_{max}}{|i_{cond}|_{max}} = \frac{\epsilon_0 C\omega^2 V_0}{\sigma C\omega V_0} = \frac{\epsilon_0 \omega}{\sigma} = \frac{8.8710^{-12}}{610^7} \omega \sim 1.2410^{-19} \omega$$

conduttività del rame

2) Nel condensatore c'è *solo* corrente di spostamento

3) Il campo magnetico totale, in ogni punto fuori e dentro il condensatore, viene dalla somma delle due (cfr. contributi elementari alla Biot-Savart), ma quella di conduzione domina

Approssimazione quasi-statica

Da dove ha origine la prevalenza, a frequenze non ultraelevate, delle correnti di conduzione su quelle di spostamento?

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\mathbf{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \nabla \times \mathbf{j}_d = \nabla \times \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{legge di Faraday}$$

$$\rightarrow \nabla \times \mathbf{j}_d = -\epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \approx 0, \quad \text{se } \mathbf{B} \text{ non varia 'troppo rapidamente'}$$

$$\rightarrow \nabla \times \mathbf{j}_d \approx 0$$

$$\rightarrow \mathbf{j}_d \approx \text{irrotazionale}$$

Linee di corrente:

Sempre riconducibili a sovrapposizione di flussi radiali da/verso sorgenti puntiformi

(Come campo elettrostatico da contributi coulombiani)

\rightarrow Campo totale di flusso radiale di corrente = 0