Un paio di questioni di analisi vettoriale

1) Incremento della norma di un vettore, o del prodotto interno di due vettori

$\delta(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})$?

$\mathbf{A}\to\mathbf{A}+\delta\mathbf{A}$

$\Rightarrow(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})\to(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})\cdot(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})=A^2+2\mathbf{A}\cdot\delta\mathbf{A}+(\delta A)^2$

$\Rightarrow(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})\cdot(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})\approx A^2+2\mathbf{A}\cdot\delta\mathbf{A}$

$\Rightarrow\delta(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})=(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})\cdot(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})-A^2\approx 2\mathbf{A}\cdot\delta\mathbf{A}$

Quindi $\delta(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})\neq\delta(A^2)\approx 2AdA!$

Infatti la notazione usuale e' parzialmente ingannevole, perche' inadeguata:
L'incremento nella norma segue dall'incremento nel *vettore*, che non e' necessariamente parallelo al vettore stesso.

In generale, l'incremento nel prodotto interno di due vettori e':

$\delta(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})\cdot(\mathbf{B}+\delta\mathbf{B})-\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\approx\mathbf{A}\cdot\delta\mathbf{B}+\delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

2) Sul vettore **D**

Il fatto che spesso risulti $\mathbf{D} \neq 0$ quando non ci sono cariche libere (dette anche *vere*) puo' apparire confondente e in contraddizione con la sua proprieta' di avere origine appunto dalle sole cariche libere: un esempio tipico e' la sfera dielettrica uniformemente polarizzata e scarica, caso in cui $\mathbf{D} \neq 0$ con linee chiuse.
L'apparente contraddizione viene risolta osservando che in generale un campo vettoriale riceve contributi sia dalla sua divergenza sia dal suo rotore (teorema di Helmholtz).
Nel caso di **D** in condizioni statiche:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_l$$
$$\nabla \times \mathbf{D} = ?$$
$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \rightarrow \nabla \times \mathbf{D} = \underbrace{\nabla \times \varepsilon_0 \mathbf{E}}_{=0} + \underbrace{\nabla \times \mathbf{P}}_{\neq 0}$$

Perche' $\nabla \times \mathbf{P} \neq 0$ in generale, se $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$?
Perche' $\chi_e = \varepsilon_r - 1$ in generale puo' variare da un punto all'altro, quindi la circuitazione di $\mathbf{P} \neq$ da quelladi $\mathbf{E}$, che e' $= 0$ per campi statici.
Se $\chi_e =$ cost, $\nabla \times \mathbf{P} = 0$ e $\mathbf{D} = 0$.