Esempi di approssimazione quasi-statica

1) C. magnetico in un solenoide ideale:

$B = \mu_0 n i$

Corrente sinusoidale:

$i = i_0 \sin \omega t \rightarrow B = \mu_0 n i_0 \sin \omega t$

Legge di Faraday: C. elettrico originato da flusso variabile

$$\frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\rightarrow 2\pi r E = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\rightarrow E = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt} = \frac{r}{2}\mu_0 n i_0 \omega \cos \omega t$$

C. elettrico (non conservativo):

Linee di campo circonferenze coassiali al solenoide e $\perp \mathbf{B}$

Corrente di spostamento:

Da' origine a un c. magnetico originato da flusso variabile di $\mathbf{E}$

Flusso di $\mathbf{E}$ attraverso una 'finestra' rettangolare, 'incernierata'

sull'asse del solenoide, lunghezza l e raggio r:

$$\Phi_E = \int_0^r E l dr = \int_0^r \frac{r}{2}\mu_0 n i_0 \omega \cos \omega t l dr = \mu_0 n i_0 \omega \cos \omega t l \frac{r^2}{4}$$

Correzione a $B(r)$ originata da corrente di spostamento:

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot\mathbf{r} = lB(0) - lB(r) = -\varepsilon_0\mu_0 n i_0 \omega^2 l \frac{r^2}{4}\sin \omega t$$

$B(0) \; = \; \mu_0 n i_0 \sin \omega t$ C. magnetico dovuto alla sola corrente di conduzione

(a $r \; = \; 0$ non c'e' flusso di $\mathbf{E}$ concatenato alla finestra)

$$B(r) - B(0) = \varepsilon_0\mu_0 n i_0 \mu_0 \omega^2 \frac{r^2}{4}\sin \omega t \le \varepsilon_0\mu_0 n i_0 \omega^2 \frac{r^2}{4}$$

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2} \rightarrow \frac{\Delta B}{B(0)} \le \frac{n i_0 \mu_0 \omega^2 \frac{r^2}{4c^2}}{\mu_0 n i_0} = \frac{\omega^2 r^2}{4c^2}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \frac{\Delta B}{B(0)} \le \frac{\pi^2 r^2}{\underbrace{T^2 c^2}_{\equiv\lambda^2}} = \pi^2\left(\frac{r}{\lambda}\right)^2$$

$\rightarrow$ Correzione a $\mathbf{B}$ dovuta a corrente di spostamento

Trascurabile se raggio del solenoide $\ll$ distanza percorsa dalla luce

in un periodo di oscillazione della corrente di conduzione

$\leftrightarrow$

Derivata seconda del campo $\mathbf{B}$ trascurabile

2) C. elettrico in un condensatore piano ideale

$$I = I_0 \cos \omega t, C = \varepsilon_0 \frac{\pi R^2}{d}$$

$$E = \frac{V}{d} = \frac{Q}{Cd} = \frac{I_0 \sin \omega t}{\omega C d} = \frac{I_0}{\varepsilon_0 \omega \pi R^2} \sin \omega t$$

$$\to \Phi(E) = E \pi r^2 = \frac{I_0 r^2}{\varepsilon_0 \omega R^2} \sin \omega t$$

$$\to B 2\pi r = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{I_0 r^2}{\varepsilon_0 \omega R^2} \omega \cos \omega t = \frac{\mu_0 I_0 r^2}{R^2} \cos \omega t$$

$$\to \begin{cases} B = \dfrac{\mu_0 I_0 r}{2\pi R^2} \cos \omega t, & r < R \\ B = \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \cos \omega t, & r > R \end{cases}$$

Legge di Faraday: da' origine a un c. elettrico aggiuntivo t.c.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_\Sigma(\mathbf{B})}{dt}$$

All'interno di C:

Σ: rettangolo incernierato sull'asse di C, lati d e r

$$\to d\Phi = Bd\ dr = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi R^2} \cos \omega t d\ dr$$

$$\to \Phi = \int d\Phi = \int_0^r \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi R^2} \cos \omega t d\ dr = \frac{\mu_0 I_0 r^2}{4\pi R^2} \cos \omega t d$$

$$\to \varepsilon = -\frac{d\Phi_\Sigma(\mathbf{B})}{dt} = \frac{\mu_0 \omega I_0 r^2 d}{4\pi R^2} \cos \omega t$$

$$\varepsilon = \oint_\Gamma \Delta \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \Delta E(0) d + \Delta E(r) d = \Delta E(r) d,\ \Gamma \text{ confine di } \Sigma$$

$$\to \Delta E(r) = \frac{\mu_0 \omega I_0 r^2}{4\pi R^2} \cos \omega t$$

$$\to \frac{\Delta E(r)}{E} = \frac{\dfrac{\mu_0 \omega I_0 r^2}{4\pi R^2} \cos \omega t}{\dfrac{I_0}{\varepsilon_0 \omega \pi R^2} \sin \omega t} \le \frac{\varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 r^2}{4} = \frac{\omega^2 r^2}{4c^2}$$

$\to$ Correzione a $\mathbf{E}$ dovuta a corrente di spostamento

Trascurabile se raggio della capacita' $\ll$ distanza percorsa dalla luce

in un periodo di oscillazione della corrente di carica/scarica

$\leftrightarrow$

Derivata seconda del campo $\mathbf{B}$ trascurabile