

Dimostrazione della scomposizione del doppio prodotto vettoriale

Si consideri il doppio prodotto vettoriale fra 3 vettori:

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

$\mathbf{v} \perp$ al piano definito da (\mathbf{b}, \mathbf{c}) , $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{v} \in$ piano definito da (\mathbf{b}, \mathbf{c})

\mathbf{b}, \mathbf{c} costituiscono una base per tutti i vettori del piano definito da (\mathbf{b}, \mathbf{c})

$$\rightarrow \mathbf{v} = m\mathbf{b} + n\mathbf{c}$$

Definizione di prodotto vettoriale:

$$x = 1, y = 2, z = 3$$

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (b_2c_3 - b_3c_2)\hat{\mathbf{i}} + (b_3c_1 - b_1c_3)\hat{\mathbf{j}} + (b_1c_2 - b_2c_1)\hat{\mathbf{k}}$$

Sviluppando l'algebra:

$$\begin{aligned} [\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_1 &= a_2 (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_3 - a_3 (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_2 \\ &= a_2 (b_1c_2 - b_2c_1) + a_3 (b_1c_3 - b_3c_1) \\ &= (a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_2b_2 + a_3b_3)c_1 \\ &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1 \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_1 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})c_1 \end{aligned}$$

Simile per 2 e 3

$$\rightarrow \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$