Significato dell'induttanza - 1

Auto-induttanza: rapporto fra flusso e corrente

Corrente : legata a f.e.m. nel circuito

$$\Phi = Li$$

$$\rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = -\mathcal{E}$$

$$\rightarrow \mathcal{E} = -L\frac{di}{dt}$$

Quindi:
Induttanza = Rapporto fra f.e.m. e variazione della corrente in un circuiti

Significato dell'induttanza - 2

Confronta con capacita':

$$V = \frac{Q}{C}$$

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{i}{C}$$

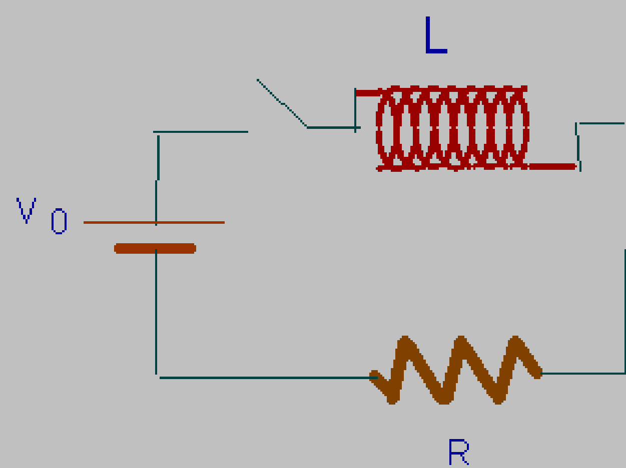
Capacita': Rapporto fra corrente e variazione della d.d.p. in un condensatore

Confronta con resistenza:

$$V = Ri$$

Resistenza: rapporto fra d.d.p. e corrente in un conduttore

"Carica" di un'induttanza



$$\oint_{circuito} E \cdot ds = Ri(t) = \text{f.e.m. totale}$$

Se si trascurano i campi magnetici:

$$V_0 + V_L(t) = Ri(t)$$

$$\rightarrow Ri(t) - V_L(t) = V_0$$

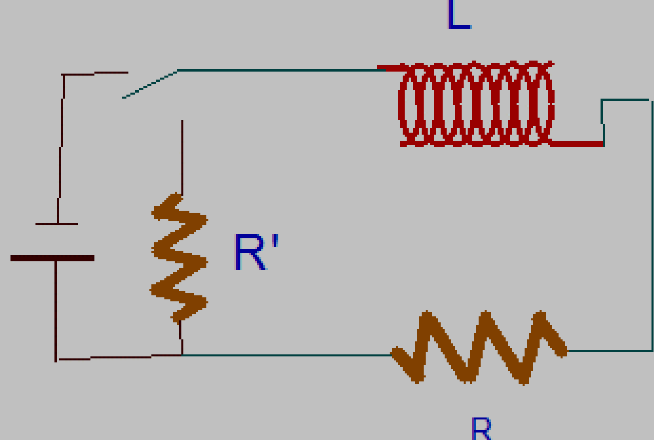
$$V_L(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

$$\rightarrow Ri(t) + L\frac{di}{dt} = V_0$$

Eq. differenziale per la funzione incognita *i(t)*
Soluzione:

$$i(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-tR/L}\right)$$

"Scarica" di un'induttanza



Se come prima si trascura il campo magnetico concatenato al circuito:

$$V_L(t) = (R + R')i$$

$$\to -L\frac{di}{dt} = (R + R')i$$

$$\tau' = \frac{L}{R + R'}$$

$$\to i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau'}}$$

$$\to i(t) = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau'}}, \quad \text{dalla cond. iniziale } i(0) = \frac{V_0}{R}$$

Se $R' \to \infty$ ($\leftarrow$ apertura diretta dell'interruttore) $\tau' \to 0$

Tuttavia i non si annulla istantaneamente:

fem autoindotta $\propto \frac{di}{dt} \to \infty$! $\to$ ddp ai capi dell'interruttore..

$\to$ Scintilla/Scarica ! Extracorrente di apertura

Energia del c.magnetico

Potenza istantanea fornita dal generatore:

$$i(t)=\frac{V_0}{R}\left(1-e^{-tR/L}\right)$$

$$\rightarrow P=V_0 i(t)=\frac{V_0^2}{R}\left(1-e^{-tR/L}\right)$$

Potenza dissipata nella resistenza:

$$P=R^2 i(t)=\frac{V_0^2}{R}\left(1-e^{-tR/L}\right)^2$$

$$=\frac{V_0^2}{R}\left(1+e^{-2tR/L}-2e^{-tR/L}\right)$$

Differenza

$$\Delta P=\frac{V_0^2}{R}\left(1-e^{-tR/L}\right)-\frac{V_0^2}{R}\left(1+e^{-2tR/L}-2e^{-tR/L}\right)$$

$$=\frac{V_0^2}{R}\left(e^{-tR/L}-e^{-2tR/L}\right)$$

En. totale nel campo magnetico:

$$E=\int_0^\infty \Delta p\,dt=\frac{V_0^2}{R}\int_0^\infty\left(e^{-tR/L}-e^{-2tR/L}\right)dt$$

$$=\frac{V_0^2}{R}\frac{L}{R}-\frac{V_0^2}{R}\frac{L}{2R}=\frac{V_0^2}{R^2}L-\frac{V_0^2}{2R^2}L=\frac{1}{2}Li^2(\infty)$$

Densita' di energia

Casi particolari (ma il risultato vale in generale...) per la *densita' volumetrica di energia* immagazzinata nel campo:

Condensatore piano

Area =A, distanza = d

$$U_E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{A}{d}V^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{A}{d}E^2d^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 AdE^2$$

$$u_E = \frac{U_E}{volume} = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon_0 AdE^2}{volume} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Solenoide infinito

Area = A, lunghezza = l

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 A}{l}i^2 = \frac{1}{2\mu_0}B^2 Al$$

$$u_B = \frac{U_B}{volume} = \frac{\frac{1}{2\mu_0}B^2 Al}{volume} = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

Modo equivalente di scrivere l'en. magnetica nel solenoide:
Simile a modi equivalenti di scrivere l'en. elettrostatica in una capacita'
Durante la carica dell'induttanza:

$P = \frac{dW}{dt} = \mathcal{E} i$ potenza istantanea della fem autoindotta

$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$

$\rightarrow dW = -i d\Phi$

$\rightarrow dW_{ext} = -dW = i d\Phi = \frac{\Phi d\Phi}{L}$, lavoro elementare fatto dall'agente esterno

$\rightarrow W_{ext} = \frac{1}{2L}\Phi^2 = \frac{1}{2} i\Phi$

$U = \frac{1}{2} i\Phi$

Sistema di 2 spire:

Attiviamo corrente i_1 nella spira 1 $\rightarrow W_1 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2$

Attiviamo corrente i_2 nella spira 2 $\rightarrow W_2 = \frac{1}{2} L_2 i_2^2$

Durante attivazione corrente i_2, nella spira 1: $\mathcal{E}_{21} = -M_{21}\frac{di_2}{dt}$

$\rightarrow dW_1' = -\mathcal{E}_{21} i_1 dt = M_{21}\frac{di_2}{dt} i_1 dt$ lavoro elementare extra speso dal gen. in 1 per mantenere costante la corrente i_1

$\rightarrow W_1' = \int_0^{i_2} dW_1' = M_{21} i_1 i_2$

En. magnetica totale delle 2 spire:

$U_{21} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M_{21} i_1 i_2$

Sistema di N spire:

$U = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} L_k i_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{N} M_{kl} i_k i_l$

Energia di un sistema di correnti

Sistema di circuiti che esercitano forze reciproche: situazione simile, *ma non identica*, al caso di un sistema di cariche

Forze fra circuiti $\rightarrow$ lavoro necessario per portare i circuiti da distanza ∞ alla configurazione finale

Ma: *il solo atto di stabilire corrente in un circuito richiede lavoro!*

Infatti:

se $R > 0$, occorre lavoro per compensare energia dissipata per effetto Joule

anche se $R = 0$, occorre lavoro per compensare la fem autoindotta mentre I cresce

Forza contro-elettromotrice

Legge di Lenz:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$$

In un circuito: fem indotta *si oppone* alla variazione di $\Phi(\mathbf{B})$ $\rightarrow$ *la corrente indotta si sottrae alla corrente esistente*

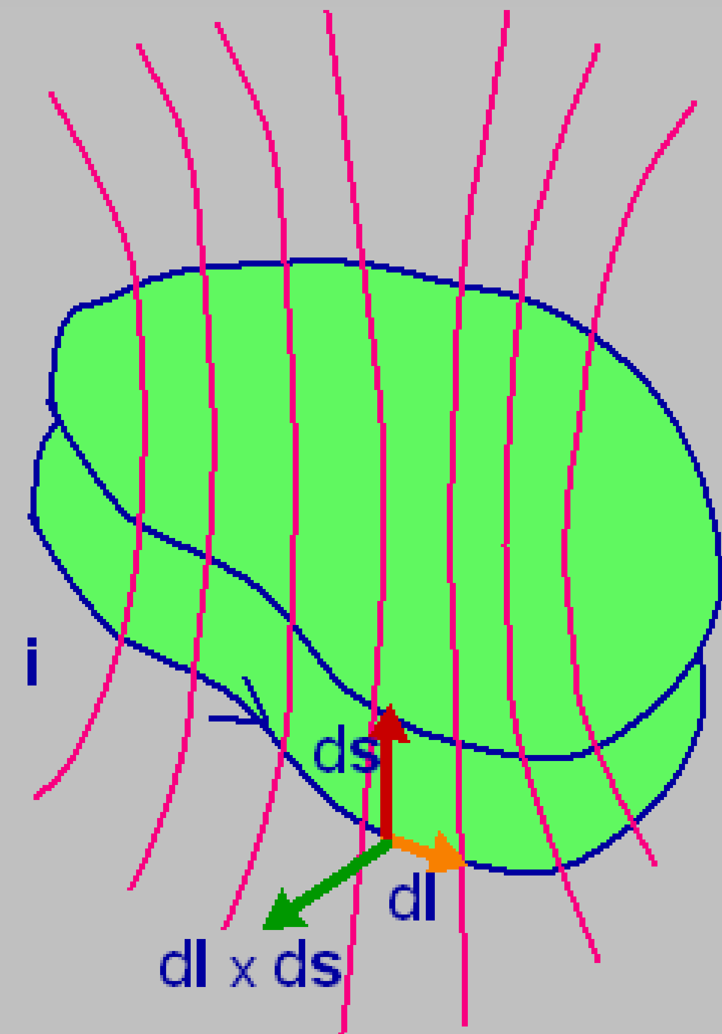
Nei circuiti ci devono essere generatori che lavorino (reversibilmente) contro le fem indotte per stabilire le correnti finali

Lavoro reversibile dei generatori = energia potenziale del campo magnetostatico

Lavoro irreversibile = energia dissipata nella resistenza dei circuiti

Si dimostra che, in analogia al caso e-statico:

$$U_B = \iiint\limits_{\substack{\text{tutto} \\ \text{lo spazio}}} \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A} \; dV \;\; ; \;\; U_E = \iiint\limits_{\substack{\text{tutto} \\ \text{lo spazio}}} \rho \, V \; dV$$



Spostamento infinitesimo a corrente costante: d**s**

Lavoro speso:

$$dL = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \left(-\int i\,d\mathbf{l}\times\mathbf{B}\right)\cdot d\mathbf{s}$$

Proprieta' del doppio prodotto misto:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -i \int (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = -i \int (d\mathbf{l} \times d\mathbf{s}) \cdot \mathbf{B}$$

Diretto secondo la normale alla superficie laterale dello pseudo-cilindro.
Allora:

$$\rightarrow dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = i \int (d\mathbf{l} \times d\mathbf{s}) \cdot \mathbf{B} = i\Phi_{s.lat}(\mathbf{B})$$

$$\rightarrow dL = -id\Phi(\mathbf{B}) = dU$$

La spira percorsa da corrente, essendo soggetta a una forza quando immersa in un campo esterno, possiede energia potenziale

$$\rightarrow dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = i \int (d\mathbf{l} \times d\mathbf{s}) \cdot \mathbf{B} = i\Phi_{s.lat}(\mathbf{B})$$

$\Phi_{s.lat}(\mathbf{B})$ e' una quantita' infinitesima

$$\rightarrow \Phi_{s.lat}(\mathbf{B}) = d\Phi(\mathbf{B})$$

$$\rightarrow dL = id\Phi(\mathbf{B})$$