Argomento teorico per la corrente di spostamento:

$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ legge di Ampere

$\rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$

D'altra parte:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$\rightarrow$ Legge di Ampere + Eq. di continuita':

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$\rightarrow$ Legge di Ampere vale in condizioni stazionarie

$(\leftarrow$ Senza accumulo di cariche$)$

Modifica di Maxwell della legge di Ampere:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \left(\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \left(\nabla \cdot \mathbf{j} + \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

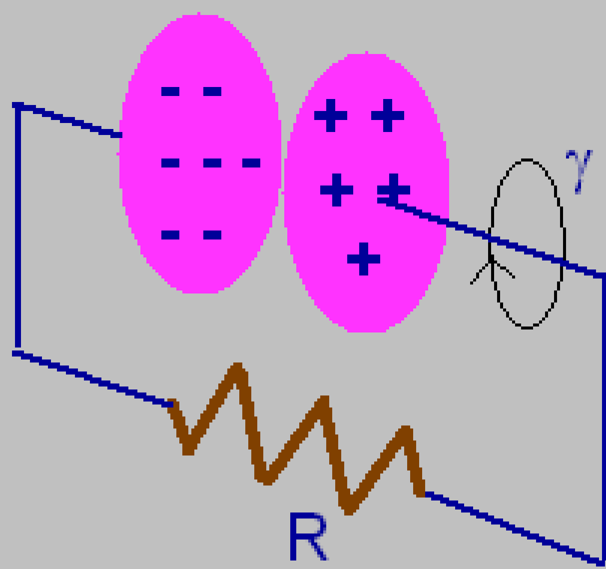
$$\rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot \left(\mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

$$\rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Esempio: condensatore che si scarica e legge di Ampere

Corrente di spostamento - 1

Condensatore che si scarica

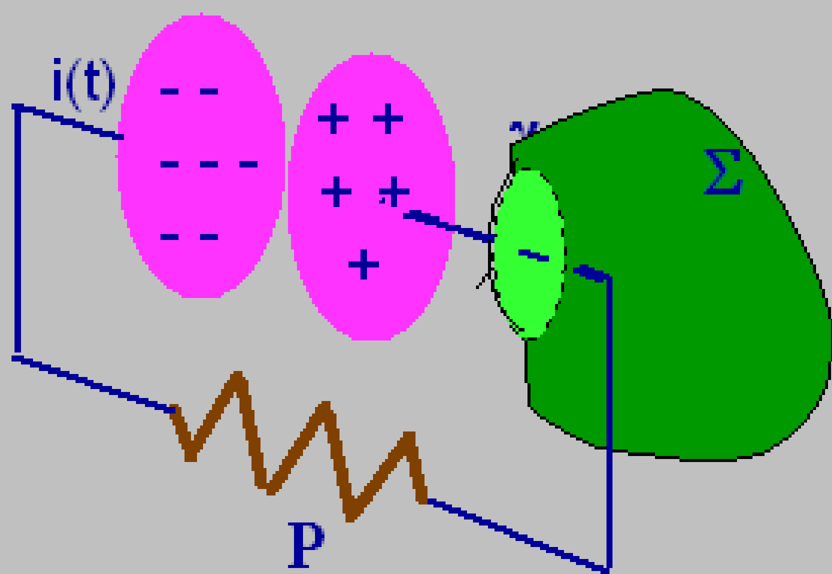


$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$

Quindi: c.magnetico in tutto lo spazio

$$\left.\begin{array}{l} \oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i \neq 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \neq 0 \end{array}\right\} \text{per i punti lungo il filo}$$

Corrente di spostamento - 2

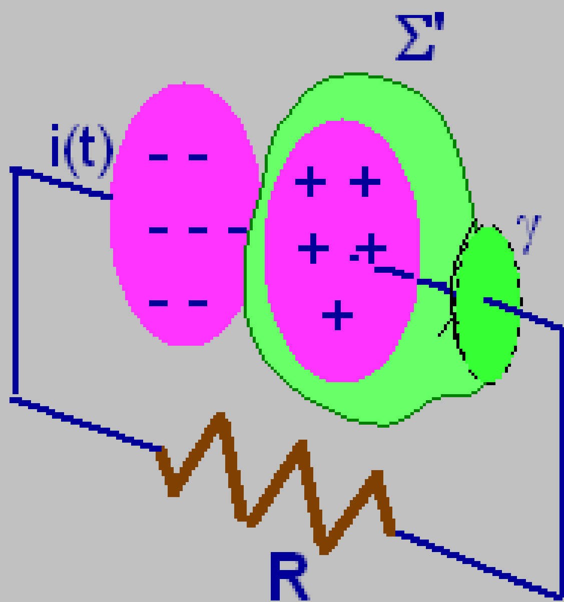


Teorema del rotore:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \neq 0$$

$$\rightarrow \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \left(\nabla \times \mathbf{B}\right) \cdot d\mathbf{A} = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \mu_0 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 i \neq 0$$

Corrente di spostamento - 3



Se uso la superficie Σ' invece di Σ, contraddizione:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \neq 0$$

$$\oiint_{\Sigma'} \mu_0 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = 0 \;\leftarrow \text{no corrente nel condensatore}$$

Due possibilita':

a) la carica non si conserva
b) la legge di Ampere e' incompleta

Corrente di spostamento - 4

Maxwell:

la carica e' sempre conservata

Modifica legge di Ampere:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \Phi_S(\mathbf{E})}{\partial t}$$

Nuovo termine, chiamato in origine
corrente di spostamento

In realta': nessun moto di cariche, nessuna corrente (ha solo le dimensioni e gli effetti di una corrente)

Equazioni di Maxwell

Forma differenziale

Forma integrale

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \oint\!\!\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \oint\!\!\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial \Phi_S(\mathbf{B})}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_S(\mathbf{E})}{\partial t}$$

Insieme a equazione della forza:

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

contengono tutto l'elettromagnetismo

Conservazione della carica

Da equazioni di Maxwell:
prendiamo la divergenza della IV equazione:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{j}) + \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

$$\rightarrow 0 = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{j}) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t}$$

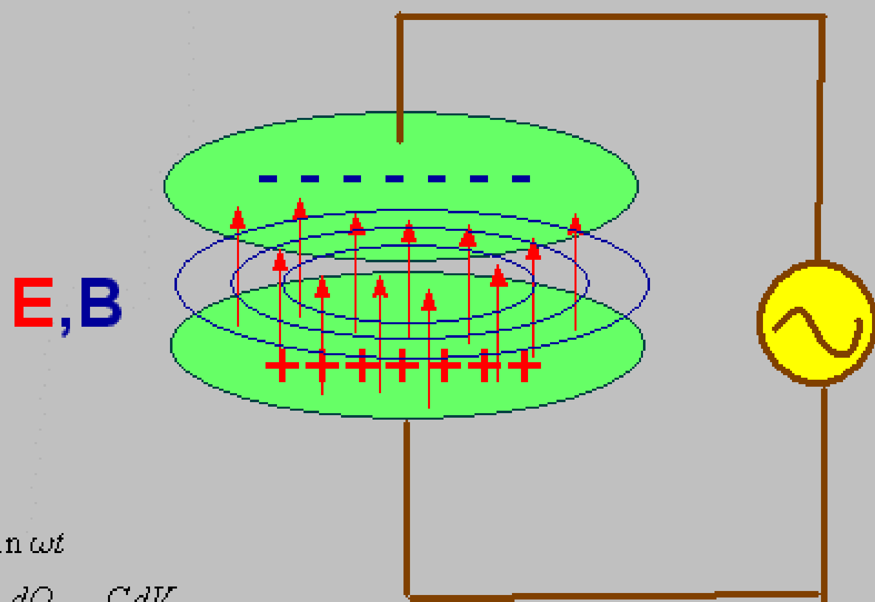
Usando la I equazione:

$$(\nabla \cdot \mathbf{j}) + \varepsilon_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = 0$$

$$\rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Equazione di continuita': la carica e' conservata

Campo magnetico in un condensatore con d.d.p. alternata



$$V_C = V_0 \sin \omega t$$

$$\rightarrow i_{cond} = \frac{dQ}{dt} = \frac{C dV_C}{dt} = \omega C V_0 \cos \omega t$$

$$\rightarrow \oint_{\Gamma'} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 \omega C V_0 \cos \omega t \quad \Gamma' \text{ cerchio attorno al filo}$$

$$E = \frac{V_C}{d} = \frac{V_0}{d} \sin \omega t \rightarrow \Phi_S(\boldsymbol{E}) = \frac{V_0}{d} \sin \omega t \pi r^2$$

$$\rightarrow i_{spost} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_S(\boldsymbol{E})}{dt} = \omega \varepsilon_0 \frac{V_0}{d} \cos \omega t \pi r^2$$

$$\rightarrow \oint_{\Gamma''} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 \pi r^2 \omega \varepsilon_0 \frac{V_0}{d} \cos \omega t \quad \Gamma'' \text{ cerchio concentrico alle piastre}$$

Γ' cerchio attorno al filo, raggio r: $\boldsymbol{B}$ tangenziale

$$B 2\pi r = \mu_0 \omega C V_0 \cos \omega t \rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi r} \omega C V_0 \cos \omega t$$

Γ'' cerchio concentrico alle piastre, raggio r: $\boldsymbol{B}$ tangenziale

$$\rightarrow i_{spost} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_{S''}(\boldsymbol{E})}{dt} = \varepsilon_0 \pi r^2 \omega \frac{V_0}{d} \cos \omega t$$

$$B 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \omega \frac{V_0}{d} \cos \omega t \rightarrow B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{r}{2} \omega \frac{V_0}{d} \cos \omega t$$

Confronto fra corrente di conduzione e corrente di spostamento

1) Nel filo c'e' *anche* una corrente di spostamento! Infatti:

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$$

Ma essa e' quasi sempre trascurabile:

$$\boldsymbol{J}_c = \sigma \boldsymbol{E}_{filo} \rightarrow E_{filo} = \frac{J_{cond}}{\sigma} \rightarrow \Phi\left(E_{filo}\right) = \frac{J_{cond} A}{\sigma} = \frac{i_{cond}}{\sigma}$$

$$\rightarrow i_{spost}\left(filo\right) = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}\frac{di_{cond}}{dt} = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}\left(-C\omega^2 V_0 \sin \omega t\right)$$

$$\rightarrow \frac{\left|i_{spost}\left(filo\right)\right|_{\max}}{\left|i_{cond}\right|_{\max}} = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}\frac{C\omega^2 V_0}{C\omega V_0} = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma} = \frac{8.87 10^{-12}}{6 10^7}\omega \sim 1.24 10^{-19}\omega$$

conduttivita' del rame

2) Nel condensatore c'e' *solo* corrente di spostamento

3) Il campo magnetico totale, in ogni punto fuori e dentro il condensatore, viene dalla somma delle due (cfr. contributi elementari alla Biot-Savart), ma quella di conduzione domina

Approssimazione quasi-statica

Da dove ha origine la prevalenza, a frequenze non ultraelevate, delle correnti di conduzione su quelle di spostamento?

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\mathbf{j}_d=\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\rightarrow\nabla\times\mathbf{j}_d=\nabla\times\left(\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\quad\text{legge di Faraday}$$

$$\rightarrow\nabla\times\mathbf{j}_d=-\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}\approx 0,\quad\text{se }\mathbf{B}\text{ non varia 'troppo rapidamente'}$$

$$\rightarrow\nabla\times\mathbf{j}_d\approx 0$$

$$\rightarrow\mathbf{j}_d\approx\ \text{irrotazionale}$$

Linee di corrente:
Sempre riconducibili a sovrapposizione di flussi radiali da/verso sorgenti puntiformi
(Come campo elettrostatico da contributi coulombiani)
$\rightarrow$ Campo totale di flusso radiale di corrente $=0$
Matematicamente:

$$\mathbf{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{\mathbf{j}_d dV}{r}$$

$$\rightarrow\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}=\nabla\times\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{\mathbf{j}_d dV}{r}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{\nabla\times\mathbf{j}_d dV}{r}\approx 0$$