Proprieta' dei 3 vettori elettrici

Campo elettrico: legato a tutte le cariche
Campo che fissa la forza agente su una carica di prova

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \rho = \text{densita' di carica } \textit{totale}$$

Spostamento elettrico: campo legato alle cariche libere (non di polarizzazione).
Polarizzazione: campo legato alle cariche di polarizzazione
Infatti:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon_0 \frac{\rho_{tot}}{\varepsilon_0} + \nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\oiint_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = -\iiint_V \rho_{pol} dV \left(= -\iint_S \sigma dA \right)$$

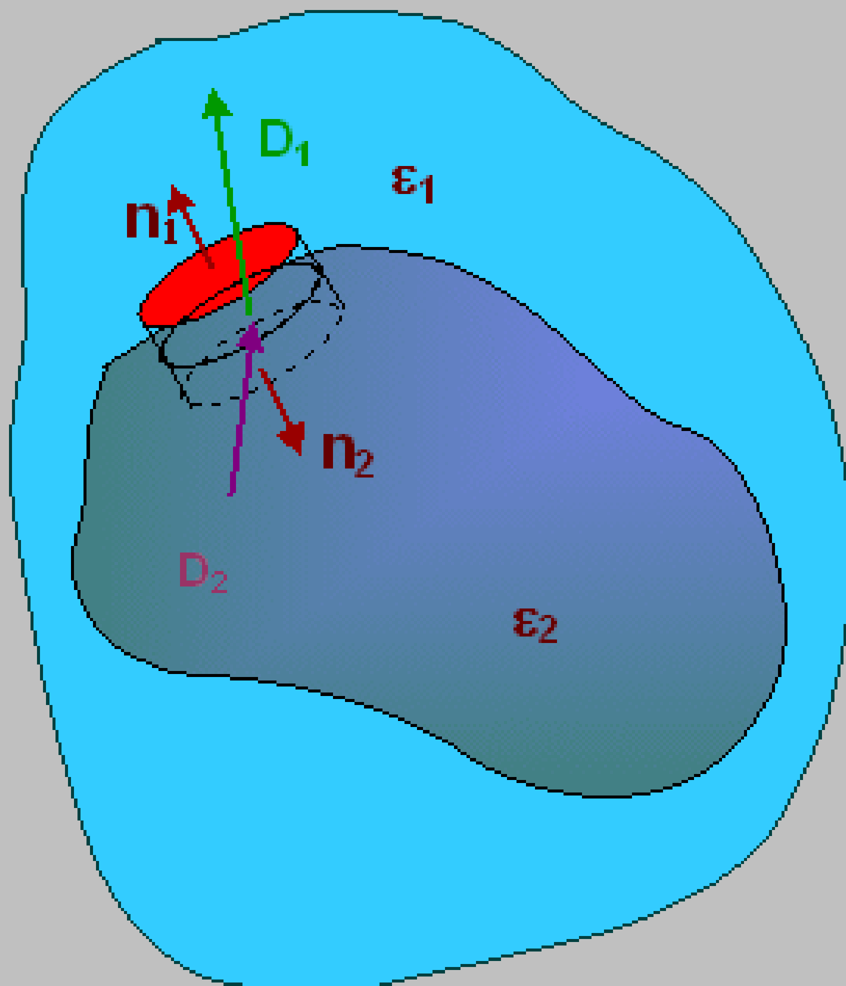
Teorema della divergenza:

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_{pol}$$

$$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon_0 \frac{\rho_{tot}}{\varepsilon_0} - \rho_{pol} = \rho_{lib}$$

Significato del segno -
div=lim flusso/superficie
Ma per ***P***, su un volumetto alla superficie del dielettrico:
flusso ***entrante*** $\rightarrow$ *q* **+va**
flusso ***uscente*** $\rightarrow$ *q* **-va**
(opposto a quel che accade con ***E***) $\rightarrow$ segno -

Proprieta' di E e D all'interfaccia fra 2 mezzi - 1



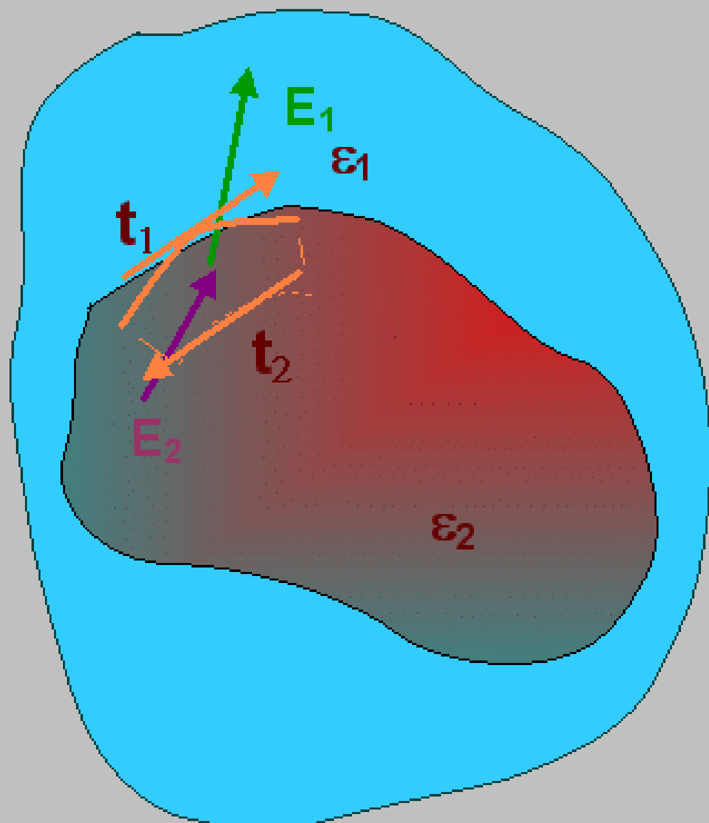
$$\Phi_{cil}(\mathbf{D}) = q_{lib} = 0$$

$$\text{Flusso sup.laterale} \rightarrow 0$$

$$\rightarrow \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2$$

La componente normale di **D** si conserva

Proprieta' di E e D all'interfaccia fra 2 mezzi



$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = 0$$

Circuitazione lati corti $\rightarrow 0$

$$\rightarrow \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}}_1 = \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}}_2$$

Valida per campi statici

In generale:

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{\partial \Phi_c(\boldsymbol{B})}{\partial t}$$

Ma: se *h(percorso)* $\rightarrow 0$ allora

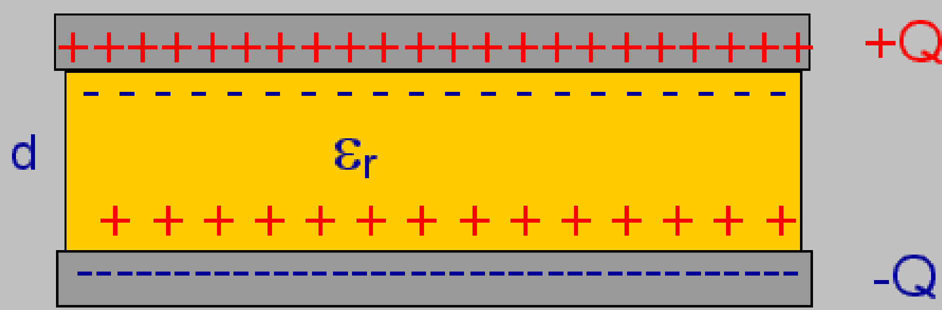
$$\Phi_C(\boldsymbol{B}) \approx \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \rightarrow 0$$

$$\rightarrow \oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} \rightarrow 0$$

anche per campi variabili

La componente tangenziale di **E** si conserva

Condensatore con dielettrico



E,D uniformi e perpendicolari alle armature

D legato alle cariche libere

$$D = D_n = \sigma_{lib} = \frac{Q}{A}$$

$$\rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}$$

Diff. di potenziale e polarizzazione:

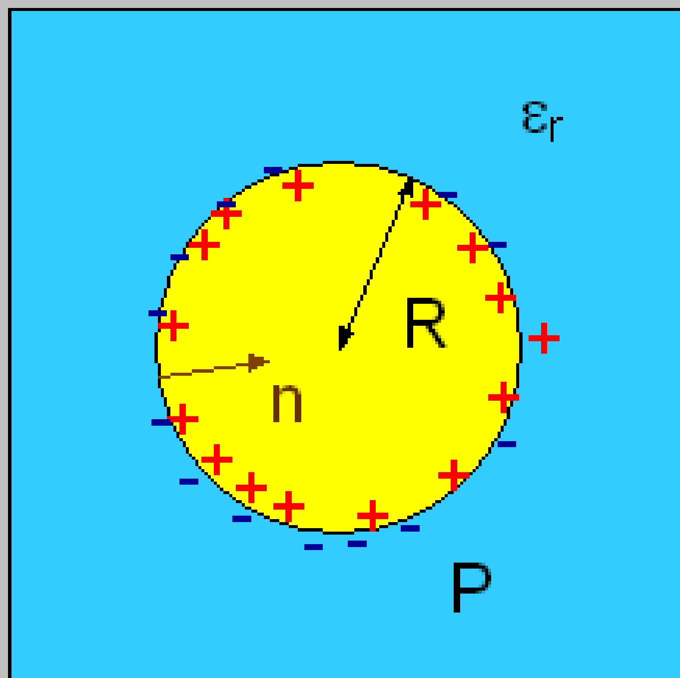
$$V = Ed = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A} d$$

$$\rightarrow C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d} = \varepsilon_r C_{vuoto} > C_{vuoto}$$

$$\sigma_{pol} = P_n = P = \varepsilon_0 \chi E = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_r - 1\right) \frac{Q}{\varepsilon_r A} = \frac{(\varepsilon_r - 1) Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}$$

Sfera carica in un dielettrico

Sfera metallica



$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{lib} \rightarrow D(r) 4\pi r^2 = Q$$

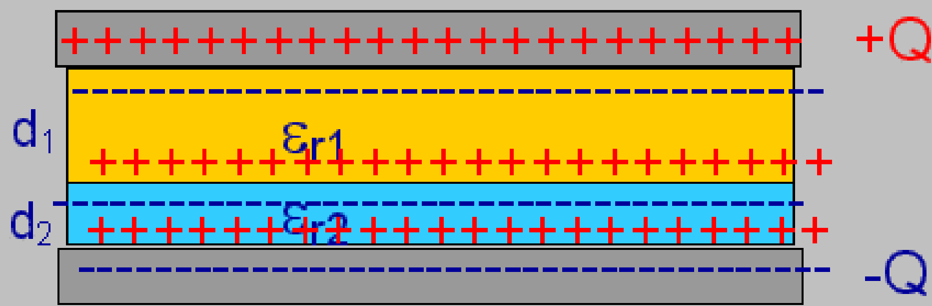
$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}$$

$$P = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}$$

$$\rightarrow P = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\sigma_{pol} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} \frac{Q}{4\pi R^2} = -\frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} \sigma_{lib}$$

Condensatore con 2 dielettrici



E,D uniformi e perpendicolari alle armature

$$D_{n1} = D_{n2} \rightarrow \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E_2$$

D legato alle cariche libere

$$D_{n1} = D_{n2} = \sigma_{lib} = \frac{Q}{A}$$

$$\rightarrow E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} A}, E_2 = \frac{D_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} A}$$

Diff. di potenziale:

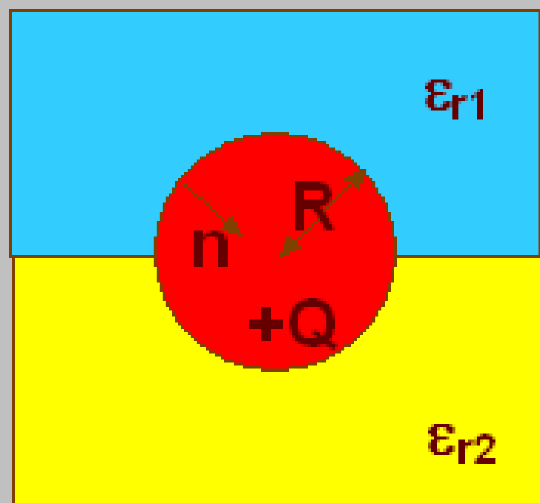
$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \varepsilon_0 A \left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}\right)^{-1}$$

$$P_1 = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_{r1} - 1\right) E_1 \frac{\varepsilon_{r1} - 1}{\varepsilon_{r1}} \frac{Q}{A} = \sigma_{pol1}$$

$$P_2 = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_{r2} - 1\right) E_2 \frac{\varepsilon_{r2} - 1}{\varepsilon_{r2}} \frac{Q}{A} = \sigma_{pol2}$$

Sfera metallica fra 2 dielettrici

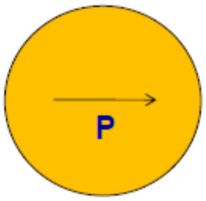


$$D4\pi r^2 = Q \rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2}, r > R$$

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \rightarrow E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}$$

$$\rightarrow E = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} r^2} \\ \dfrac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} r^2} \end{cases}$$

Polarizzazione e campi di una sfera dielettrica



Ipotesi: $\mathbf{P}$ uniforme

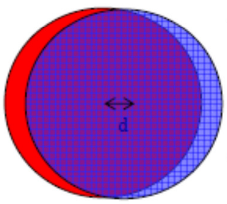
[Consistente con risultato generale (non dimostrato) :

Per solidi omogenei in campo esterno uniforme,

$\mathbf{P}$ uniforme solo se la superficie e' un ellissoide]

Sistema equivalente a due sfere cariche uguali

Raggio a, carica opposta con densita' ρ, separazione d



$\rightarrow$ Momento di dipolo:

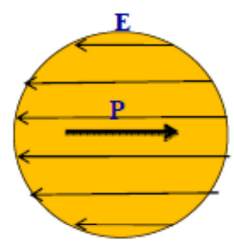
$$p = Qd = \frac{4}{3}\rho a^3 d$$

$\rightarrow$ Polarizzazione:

$$P = \frac{p}{V} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho d}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \rho d$$

Campo interno di una sfera uniformemente carica:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{R^3}$$



Campo prima sfera:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}_1}{R^3}, \quad \mathbf{r}_1 \text{ coordinata riferita al centro di 1}$$

Campo seconda sfera:

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}_2}{R^3}, \quad \mathbf{r}_2 \text{ coordinata riferita al centro di 2}$$

Campo totale = Campo interno di una sfera uniformemente polarizzata

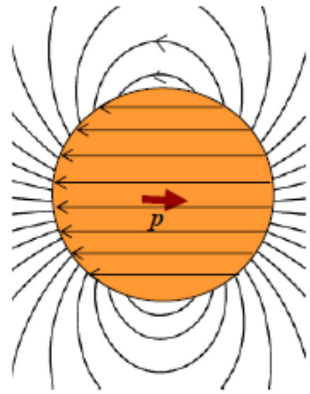
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}_1}{R^3} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}_2}{R^3} = \frac{Q(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{3V\varepsilon_0} = -\frac{Q\mathbf{d}}{3V\varepsilon_0} = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$$

Poiche' $\mathbf{P}$ e' uniforme, lo e' anche $\mathbf{E}$

Campo esterno di una sfera uniformemente polarizzata: quello di un dipolo elettrico nell'origine

Momento di dipolo: $p = P\frac{4}{3}\pi a^3$

Attenzione: questo e' il campo originato dalle cariche di polarizzazione della sfera polarizzata.
Se $\boldsymbol{P}$ e' quella, p es, di un *elettrete* (materiale con pol. permanente) sferico, questo e' il campo totale.
Se $\boldsymbol{P}$ e' originata da un campo esterno, il campo totale e' in ogni punto la somma di quello esterno e di quello originato da $\boldsymbol{P}$

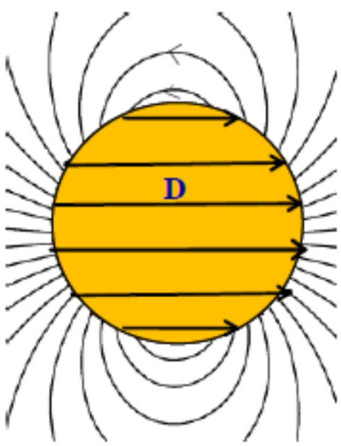


Dentro la sfera: $\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$

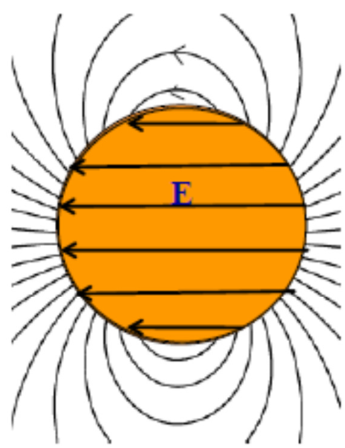
$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = -\varepsilon_0\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} + \mathbf{P} = \frac{2}{3}\mathbf{P}$

Fuori la sfera: $\mathbf{E} =$ dipolo $\mathbf{p}$

$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} = \varepsilon_0 \cdot$ dipolo $\mathbf{p}$



D: linee chiuse
Origine da cariche libere, assenti



E: linee aperte
Origine da tutte le cariche

Polarizzazione e polarizzabilita’

Per calcolare polarizzazione **P:**

$\mathbf{P} = n\varepsilon_0 \alpha \mathbf{E}_{loc}$

$\mathbf{E}_{loc} =$ campo elettrico totale agente su ogni molecola

$\rightarrow$ Per conoscere $\mathbf{P}$ occorre conoscere $\mathbf{E}_{loc}$

Due problemi non banali:

1) $\mathbf{E}_{loc} \neq \mathbf{E}_{diel}$

$\mathbf{E}_{diel}$ Campo presente nel dielettrico

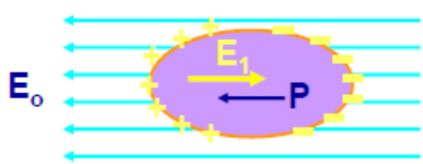
Infatti: Bisogna escludere il contributo della molecola stessa

2) $\mathbf{E}_{diel} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p$

$\mathbf{E}_0$ campo polarizzante (= esterno)

$\mathbf{E}_p$ campo dovuto a cariche di polarizzazione

Dielettrico immerso in campo uniforme



P: polarizzazione (ipotesi: uniforme)

$\mathbf{E}_1$: campo depolarizzante

$\mathbf{E}_1$: campo dovuto alle cariche di polarizzazione sulla superficie esterna

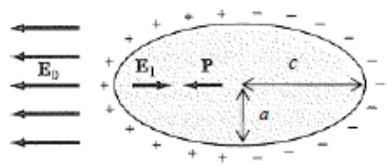
$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}_{diel}$

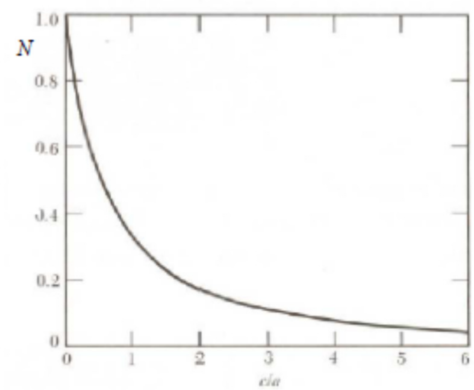
$\rightarrow \mathbf{E}_{diel} = \dfrac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0 \chi} = \mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 - \dfrac{N\mathbf{P}}{\varepsilon_0}$ $\quad N$ fattore di forma del dielettrico

$$\rightarrow \mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \left(\mathbf{E}_0 - \frac{N\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right)$$

$$\rightarrow \mathbf{P} = \frac{\varepsilon_0 \chi}{1 + N\chi} \mathbf{E}_0$$

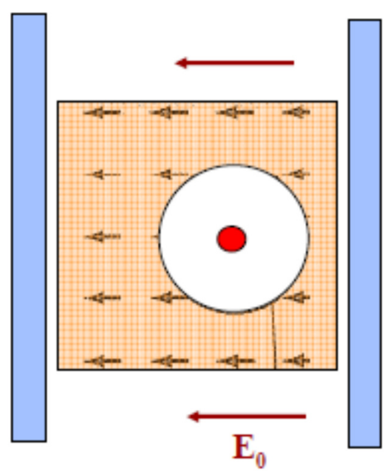
Fattore di forma del dielettrico: ellissoide
[In questo modo si puo' assumere ***P*** uniforme]





Dipende in generale da forma e dimensioni del campione

Lastra sottile immersa in un campo uniforme: **P** uniforme
Idea centrale (Lorentz):
'Rimozione ideale' di una sfera di dielettrico centrata sulla molecola: cavita' piccola rispetto a dimensione lastra, grande rispetto a raggio molecolare



$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1$ Campo macroscopico nel dielettrico

$\mathbf{E}_0 =$ Campo polarizzante (esterno)

$\mathbf{E}_1 =$ Campo cariche di polarizzazione (superficie esterna del dielettrico)

$\rightarrow \mathbf{E}_1 = -\dfrac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}$ Lastra sottile $\perp$ $\mathbf{E}_0$

$$\rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}$$

Campo al centro della sfera vuota:

$\mathbf{E}_{eff} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_2$ Campo efficace nella cavita'

$\mathbf{E}_2 =$ Campo cariche di polarizzazione (superficie interna della cavita')

Equivalente a quello di una sfera con polarizzazione $-\mathbf{P}$

$$\rightarrow \mathbf{E}_2 = -\frac{-\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} = \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$$

$$\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E}_{eff} + \mathbf{E}_3 = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} + \mathbf{E}_3$$

$\mathbf{E}_3 = \sum\limits_{\substack{\text{dipoli} \\ \text{entro sfera}}} \mathbf{E}_i$ Contributo dei dipoli contenuti entro la sfera

$\mathbf{E}_3$: termine difficile da valutare in generale
Gas, liquidi, solidi a simmetria cubica: zero
Solidi con altra simmetria: piccolo

$\mathbf{E}_{loc} \simeq \mathbf{E}_{eff} = \mathbf{E} + \dfrac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$ Campo di Lorentz

In questa forma, valida indipendentemente dalla forma del dielettrico

$$\mathbf{P} = n\alpha\varepsilon_0\mathbf{E}_{loc}$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E}$$

$$\rightarrow \mathbf{P} = n\alpha\varepsilon_0\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}\right) \rightarrow \mathbf{P} = \frac{n\alpha}{1 - n\alpha/3}\mathbf{E} \rightarrow \chi = \frac{n\alpha}{1 - n\alpha/3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \chi = \varepsilon_r - 1 \\ \chi = \dfrac{n\alpha}{1 - n\alpha/3} \end{array}\right\} \rightarrow \varepsilon_r - 1 = \frac{n\alpha}{1 - n\alpha/3}$$

$$(\varepsilon_r - 1)\left(1 - \frac{n\alpha}{3}\right) = n\alpha \rightarrow (\varepsilon_r - 1) = \left[\frac{\varepsilon_r - 1}{3} + 1\right]n\alpha = \frac{\varepsilon_r + 2}{3}n\alpha$$

$$\rightarrow \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n\alpha}{3} \quad \text{Relazione di Clausius} - \text{Mossotti}$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{3}{n}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = 4\pi R^3 + \frac{1}{3\varepsilon_0}\frac{p^2}{kT}$$

Campi **E** e **D** nella cavita' di un dielettrico

Campo in una cavita' sferica presente in un dielettrico con
P uniforme e campo $\mathbf{E}_0$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$$

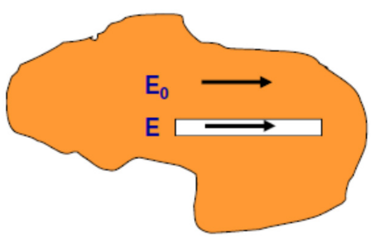
Spostamento elettrico:
Nella cavita' la polarizzazione e' nulla

$$\rightarrow \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{P_0}}{3}$$

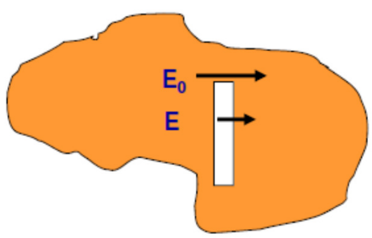
$$\mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 + \mathbf{P_0}$$

$$\rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{D}_0 - \frac{2}{3}\mathbf{P_0}$$

C.elettrico in cavita'allungate o schiacciate in un dielettrico:



$$E_{\text{t diel}} = E_{\text{t cav}} \rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_0$$



$$D_{\text{n diel}} = D_{\text{n cav}} \rightarrow \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$
$$\rightarrow \mathbf{E} = \varepsilon_r \mathbf{E}_0$$