

Proprieta' magnetiche della materia

Situazione analoga a quella dei materiali isolanti in presenza di c.elettrici (polarizzazione,...)

Materiali: possono magnetizzarsi in presenza di un campo magnetico esterno

Per i dielettrici: *riarrangiamento di cariche*

Per i materiali magnetici: *correnti?*

Moto degli elettroni: *correnti atomiche*

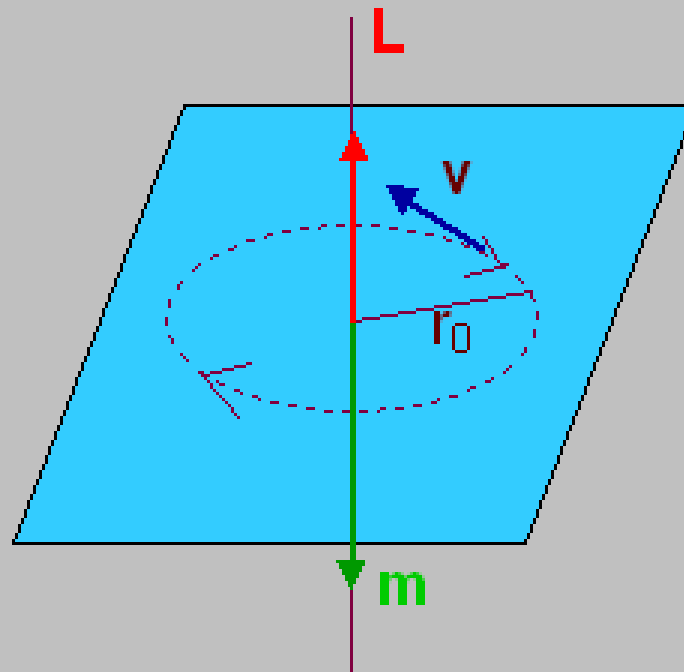
Quindi: *momenti di dipolo magnetico*

Materiali *paramagnetici*: molecole dotate di momento magnetico proprio

Materiali *ferromagnetici*: come i paramagnetici, ma danno luogo a magnetizzazione permanente

Materiali *diamagnetici*: molecole prive di momento di dipolo magnetico proprio

Momenti di dipolo atomici



Modello semplificato: elettrone in orbita circolare attorno a protone

$$m_e \frac{v^2}{r_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r_0}} \text{ velocita' elettrone}$$

$$\tau = \frac{2\pi r_0}{v} = 2\pi r_0 \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m_e r_0}{e^2}} = \frac{4\pi}{e} \sqrt{\pi\epsilon_0 m_e r_0^3} \text{ periodo orbita}$$

$$L = m_e v r_0 \text{ mom. angolare orbitale}$$

$$\mu_{\text{orb}} = \pi r_0^2 i = -\pi r_0^2 \frac{e}{\tau} = -\frac{1}{2} e r_0 v \text{ mom. dipolo magnetico orbitale}$$

$$\rightarrow \mu_{\text{orb}} = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{L}$$

Momenti orbitali e di spin

Moto orbitale: simile a quello di rivoluzione annua della Terra attorno al Sole

In piu': moto di spin (rotazione dell'elettrone attorno al suo asse), analogo alla rotazione diurna della Terra

Effetto totalmente quantistico-relativistico

Come per il moto orbitale:
momento magnetico di spin μ_{spin}

Momento magnetico totale:

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_{orb} + \boldsymbol{\mu}_{spin}$$

Somma vettoriale si fa con le regole quantistiche, puo' essere 0 anche se $L \neq 0$

Paramagnetismo

$\mu_{atomo} \neq 0$: orientamento dipoli

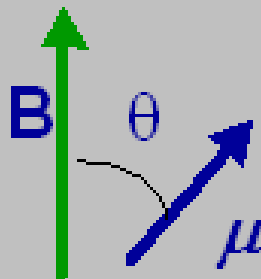
Diamagnetismo

$\mu_{atomo} = 0$

$L_{atomo} \neq 0$ precessione di Larmor

Magnetizzazione per orientamento - 1

Situazione simile a quella dei dielettrici polari:



En. potenziale dipolo in c. esterno:

$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$$

Fattore di Boltzmann (distribuzione di frequenza statistica per energia U):

$$f(U)dU \propto e^{-\frac{U}{kT}} dU$$

Valor medio componenti dipolo:

$$\langle \mu_x \rangle = \langle \mu_y \rangle = 0$$

$$\langle \mu_z \rangle \propto \int_{U_{\min}}^{U_{\max}} \mu_z e^{-\frac{U}{kT}} dU = \int_{-1}^{+1} \mu_0 \cos \theta e^{-\frac{\mu_0 \cos \theta}{kT}} \mu_0 d(\cos \theta)$$

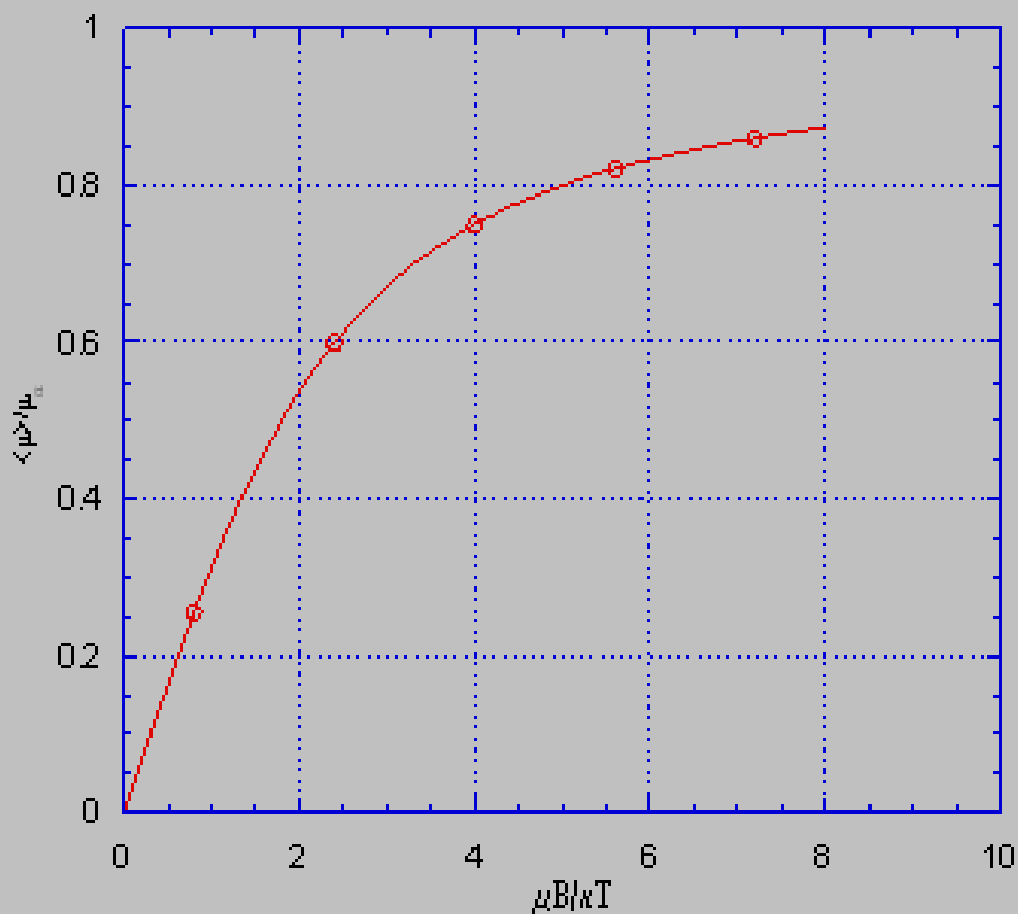
Magnetizzazione per orientamento - 2

Risultato del calcolo:

$$\langle \mu_z \rangle \approx \frac{1}{3} \frac{\mu_{af}^2 B}{kT}$$

valida per alte temperature
Andamento completo:

Valor medio momento di dipolo vs. c. esterno



Diamagnetismo

1) Moto di precessione

Grandezza vettoriale generica, funzione del tempo: $\mathbf{A}(t)$

Se $\mathbf{A}(t)$ e' un vettore di modulo costante, rotante attorno all' asse z con vel.angolare Ω p es diretta lungo z :

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_z \hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{A} = A_{\perp} + A_{\parallel} \hat{\mathbf{k}} = A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_x = A_{\perp} \cos \Omega_z t \rightarrow \frac{dA_x}{dt} = -\Omega_z A_{\perp} \sin \Omega_z t = -\Omega_z A_y \\ A_y = A_{\perp} \sin \Omega_z t \rightarrow \frac{dA_y}{dt} = \Omega_z A_{\perp} \cos \Omega_z t = \Omega_z A_x \\ A_z = A_{\parallel} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_{\perp}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dA_y}{dt} \hat{\mathbf{j}} = -\Omega_z A_y \hat{\mathbf{i}} + \Omega_z A_x \hat{\mathbf{j}}$$

Si puo' scrivere:

$$\rightarrow \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\underbrace{\Omega_y}_{=0} A_z - \Omega_z A_y \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\Omega_z A_x - \underbrace{\Omega_x}_{=0} A_z \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\underbrace{\Omega_x}_{=0} A_y - \underbrace{\Omega_y}_{=0} A_x \right) \hat{\mathbf{k}}$$

$$\rightarrow \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}$$

In generale:

Ogni volta che un vettore $\mathbf{A}(t)$ soddisfa l'eq. differenziale di cui sopra, la sua evoluzione temporale consiste in una precessione attorno alla direzione di $\boldsymbol{\Omega}$ con velocita' angolare Ω

2) Precessione di Larmor

Mom. meccanico su un dipolo magnetico immerso in un campo B :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$

Eq. del moto:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

Poiche':

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{L}, \quad \gamma \text{ fattore giromagnetico}$$

$$\rightarrow \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \gamma \mathbf{L} \times \mathbf{B} = -\gamma \mathbf{B} \times \mathbf{L}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\Omega} = -\gamma \mathbf{B}$$

→ Il dipolo precessa con vel. angolare $-\gamma B$ attorno a B

Elettroni atomici: modello di Bohr

Moto in un campo centrale → Teorema di Larmor

In presenza di un campo B :

Precessione dei momenti magnetici attorno a B

Frequenza di Larmor:

$$\omega_L = -\frac{eB}{2m}$$

Momento magnetico indotto:

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{Ze^2 B}{4m} \langle r^2 \rangle, \quad r \text{ raggio dell'orbita ortogonale a } B$$

Momento indotto legato a moto orbitale

$\delta\boldsymbol{\mu}$ mom. magnetico indotto su un elettrone = $\delta i A$, A costante

$$i = \frac{e}{\tau}, \quad \tau \text{ periodo orbita di Bohr} \rightarrow i = e\nu = \frac{e\omega}{2\pi}$$

$$\rightarrow \delta i = \frac{e\omega_L}{2\pi} = -\frac{e^2 B}{4\pi m}$$

$$\rightarrow \delta\boldsymbol{\mu} = \delta i A = \delta i \pi r^2 = -\frac{e^2 B}{4m} r^2 \rightarrow -\frac{Ze^2 B}{4m} r^2, \quad Z \text{ elettroni}$$

$\langle R^2 \rangle$: raggio quadratico medio

$$\rightarrow \langle R^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle$$

$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle$ per sistema a simmetria sferica

$$\rightarrow \langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle = \frac{2}{3} \langle R^2 \rangle \quad \text{orbita piana}$$

$$\rightarrow \mu = -\frac{Ze^2 B}{4m} \frac{2}{3} \langle R^2 \rangle = -\frac{Ze^2 B \langle R^2 \rangle}{6m}$$

Suscettività diamagnetica:

$$\chi_m^{dia} = \frac{\mu_0 n \mu}{B} = -\frac{Ze^2 \mu_0 n \langle R^2 \rangle}{6m} \quad \text{indipendente da } T$$

Risultato sostanzialmente confermato con la meccanica quantistica

Tuttavia:

Altri effetti (elettroni liberi: diamagnetismo di Landau, ...)

Suscettività diamagnetica < 0 , piccola

→ Magnetizzazione opposta al campo esterno

→ Campo interno al materiale $<$ campo nel vuoto

Magnetizzazione, suscettività'

Vettore magnetizzazione: mom. di dipolo per unita' di volume

$$\mathbf{M} = \langle \boldsymbol{\mu} \rangle n$$

no. molecole/unita' di volume

Espressione per \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} = -n \frac{Ze^2 r^2}{6m_e} \mathbf{B} \quad \textit{diamagnetico}$$

$$\mathbf{M} = n \frac{\mu_{at}^2}{3kT_e} \mathbf{B} \quad \textit{paramagnetico}$$

Magnetizzazione totale:

$$\mathbf{M} = n \left(\frac{\mu_{at}^2}{3kT_e} - \frac{Ze^2 r^2}{6m_e} \right) \mathbf{B}$$

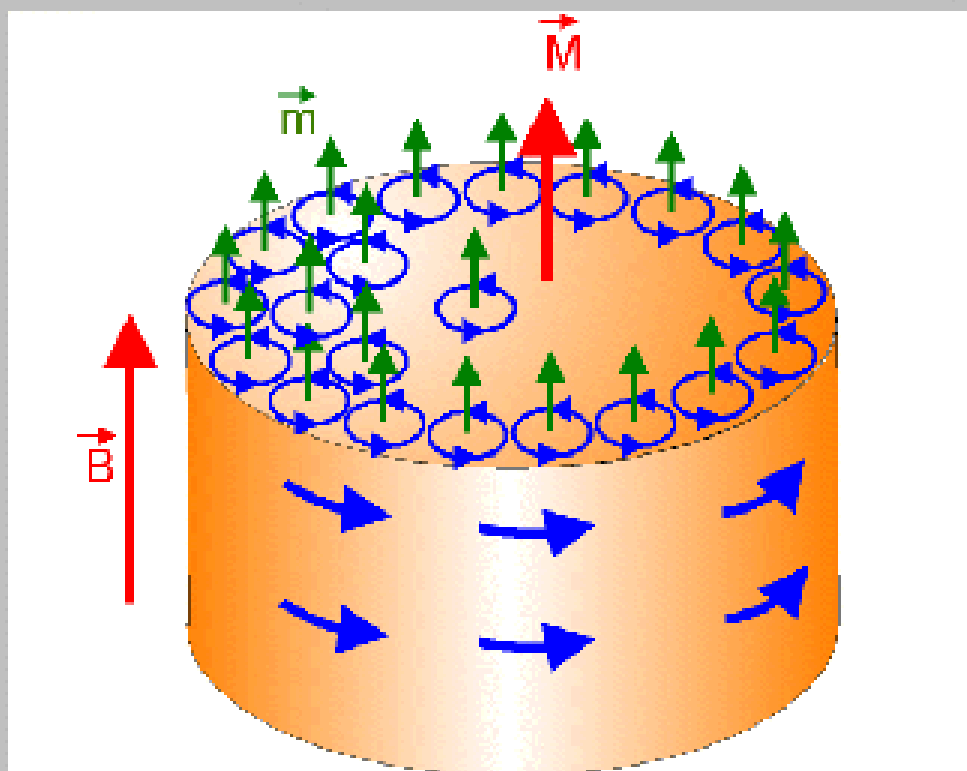
$$\mathbf{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0 (1 + \chi_m)} \mathbf{B}, \quad \chi_m \textit{ suscettivita' magnetica}$$

$$\chi_m \cong n\mu_0 \left(\frac{\mu_{at}^2}{3kT_e} - \frac{Ze^2 r^2}{6m_e} \right) \quad \text{se } \chi_m \ll 1$$

Interpretazione della magnetizzazione - 1

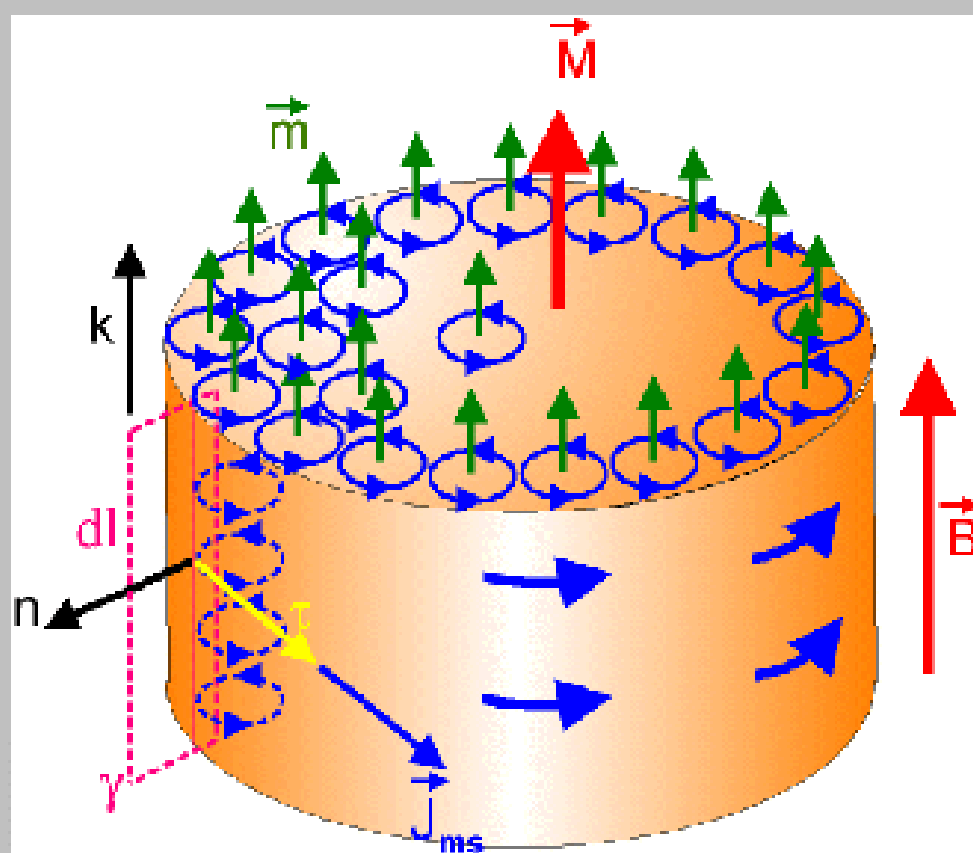
Procedura analoga al caso della polarizzazione dielettrica:

cariche superficiali-polarizzazione
correnti superficiali-magnetizzazione



$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \vec{m}_i}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{n \langle \vec{m} \rangle}{\Delta V} = N \langle \vec{m} \rangle$$

Interpretazione della magnetizzazione - 2



$$dI_{\text{super}} = \vec{J}_{ms} \cdot \vec{\tau} dl$$

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n}$$

Valori tipici di suscettività'

Permeabilità' relative

| Materiale | μ_r | $\chi_{\text{m}} = \mu_r - 1$ |
|------------------------------|----------|-------------------------------|
| <i>Paramagnetico</i> | | |
| Alluminio | 1.000021 | $2.0 \cdot 10^{-5}$ |
| Magnesio | 1.000012 | $1.2 \cdot 10^{-5}$ |
| Palladio | 1.00082 | $8.2 \cdot 10^{-4}$ |
| Titanio | 1.00018 | $1.8 \cdot 10^{-4}$ |
| <i>Diamagnetico</i> | | |
| Bismuto | .99983 | $-17 \cdot 10^{-5}$ |
| Oro | .99996 | $-4 \cdot 10^{-5}$ |
| Argento | .99998 | $-2 \cdot 10^{-5}$ |
| Rame | .99999 | $-1 \cdot 10^{-5}$ |
| <i>Ferromagnetico</i> | | |
| Nickel | 250 | 249 |
| Cobalto | 600 | 599 |
| Ferro(puro) | 4000 | |
| Mumetal | 100000 | |

Vettori magnetici

Situazione analoga a quella nei materiali dielettrici:

B vettore *campo magnetico* (e' quello che compare nell'equazione della forza) - legato a tutte le correnti, vere e di magnetizzazione

M vettore *magnetizzazione* - legato alle correnti di magnetizzazione

H vettore *campo magnetizzante* - legato alle correnti vere

Relazione fra i 3 vettori:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

$$\rightarrow \mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \mathbf{B}$$

$$\rightarrow \mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

permeabilita'
magnetica