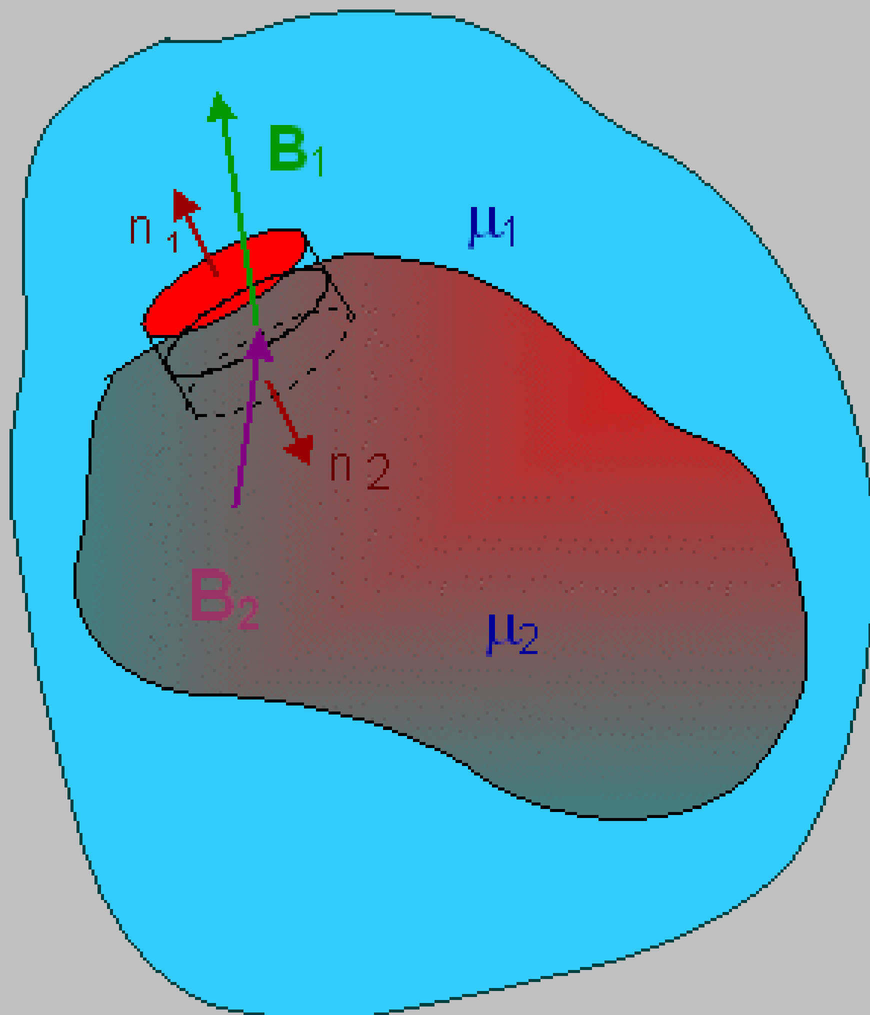
Proprieta' di B e H all'interfaccia fra 2 mezzi - 1



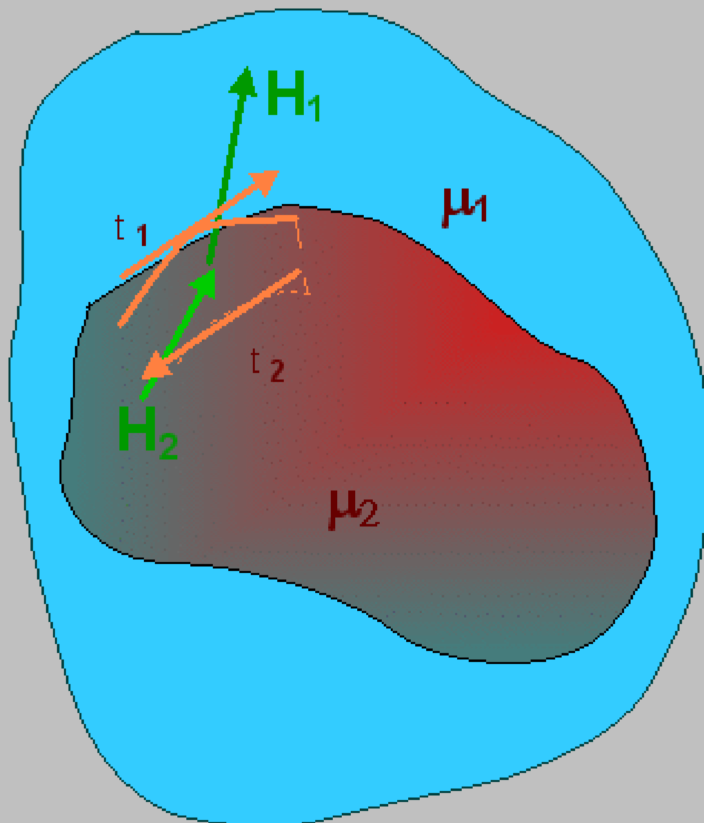
$$\Phi_{cil}\left(\mathbf{B}\right) = 0$$

$$\text{Flusso sup. laterale} \to 0$$

$$\to \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2$$

*La componente normale di **B** si conserva*

Proprieta' di B e H all'interfaccia fra 2 mezzi - 2



$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 0 \text{ in assenza di correnti libere}$$

$$\text{Circuitazione lati corti} \rightarrow 0$$

$$\rightarrow \mathbf{H}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}}_1 = \mathbf{H}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}}_2$$

La componente tangenziale di **H** si conserva

Risultato valido anche per campi variabili
($\Phi(\mathbf{E}) \rightarrow 0$ se lati corti $\rightarrow 0$)

Effetto di campi applicati: magnetizzazione del mezzo

$\mathbf{M} = \langle \boldsymbol{\mu} \rangle n$ vettore magnetizzazione

$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle$ momento di dipolo magnetico medio di ogni molecola

n molecole/volume

Modello molecolare semplificato: mezzo lineare

$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = c\mathbf{B},\ c$ 'polarizzabilita' magnetica'

$\mathbf{B} =$ campo totale agente su ogni molecola

Mezzo lineare:

$$\mathbf{M} = \frac{\chi_m}{(1+\chi_m)\mu_0}\mathbf{B}$$ suscettivita' magnetica

Permeabilita' magnetica relativa:

$\mu_r = 1 + \chi_m$

$\mu = \mu_0 \mu_r$ Permeabilita' magnetica assoluta

c, χ_m, μ quasi sempre: quantita' scalari $\rightarrow$ ***M* ‖ *B***

In strutture cristalline a bassa simmetria: matrici $\rightarrow$ ***M non* ‖ *B***

χ_m, μ: grandezze macroscopiche, accessibili alla misura diretta
c: grandezza microscopica, inaccessibile alla misura diretta

Definizione:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu_r}$$

Vettore legato alle sole correnti “vere”, o “libere”

Lo stato magnetico di un materiale e’ definito da due vettori indipendenti, p es $\mathbf{B}$ e $\mathbf{M}$ oppure $\mathbf{B}$ **e** $\mathbf{H}$

$\mathbf{H}$ risulta utile per la risoluzione dei problemi, e anche per riscrivere le eq. di Maxwell nei mezzi materiali in modo simile a quelle nel vuoto

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{M} = n\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = nc\mathbf{B} \\ &\mathbf{M} = \frac{\chi_m}{(1+\chi_m)\mu_0}\mathbf{B} \end{aligned}\right\} \rightarrow n\mu_0 c = \frac{\chi_m}{(1+\chi_m)}$$ Polarizzabilita' magnetica

Si noti: $\chi_m \ll 1 \rightarrow c = \dfrac{\chi_m}{(1+\chi_m)n\mu_0} \simeq \dfrac{\chi_m}{n\mu_0}$

$$\mathbf{M} = nc\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M}) \rightarrow \mathbf{M}(1-nc\mu_0) = nc\mu_0\mathbf{H}$$

$$\rightarrow \mathbf{M} = \frac{nc\mu_0}{(1-nc\mu_0)}\mathbf{H} = \frac{\dfrac{\chi_m}{(1+\chi_m)}}{1-\dfrac{\chi_m}{1+\chi_m}}\mathbf{H} = \chi_m\mathbf{H}$$

Relazione piu' semplice: quella fra $\mathbf{M}$ e $\mathbf{H}$

$\boldsymbol{B}$ vettore campo magnetico; quello che compare nell'espressione della forza su una carica in movimento
Legato a tutte le correnti, libere e di magnetizzazione

$\boldsymbol{M}$: vettore magnetizzazione
Legato alle correnti di magnetizzazione

$\boldsymbol{H}$ vettore campo magnetizzante
Legato alle correnti libere

Vuoto: $\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}_{lib} \end{cases}$

Materia: $\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{j}_{lib} + \boldsymbol{j}_m \right) \end{cases}$

Definizione:

$\boldsymbol{H} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}$ sempre

$\boldsymbol{M} = \dfrac{1}{\mu_0} \dfrac{\chi_m}{1+\chi_m} \boldsymbol{B} = \dfrac{1}{\mu_0} \dfrac{\mu_r - 1}{\mu_r} \boldsymbol{B}$ materiali omogenei, lineari, isotropi

$\rightarrow \boldsymbol{B} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H}$ relazione costitutiva materiali omogenei, lineari, isotropi

$\rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_{lib} \end{cases}$ equazioni della magnetostatica nei mezzi materiali

Effetti sul campo magnetico di materiali diamagnetici o paramagnetici:

Sempre molto piccoli, di solito trascurabili (e trascurati)
→Campo $\boldsymbol{B}$ = quello nel vuoto

Possibile eccezione: materiale paramagnetico a bassa T e alto $\boldsymbol{B}$
→Magnetizzazione elevata
→Campo $\boldsymbol{B}$ simile a quello di un ferromagnete

Effetti di materiali ferromagnetici:
(molto) Grandi

Osservazione interessante: in assenza di correnti libere

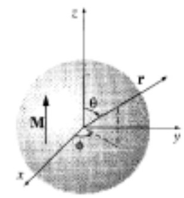
$\boldsymbol{j}_{lib} = 0 \rightarrow \nabla \times \boldsymbol{H} = 0$ $\boldsymbol{H}$ irrotazionale

$\rightarrow \boldsymbol{H} = -\nabla\Phi(\boldsymbol{r}),\quad \Phi(\boldsymbol{r})$ potenziale magnetostatico

Problemi di magnetostatica: *in assenza di correnti vere*, si puo' calcolare $\boldsymbol{H}$ per mezzo di un potenziale scalare (come $\boldsymbol{E}$ in elettrostatica), come se esistessero cariche magnetiche (anzi : poli), analoghe a quelle elettriche. Ma: con il vincolo assoluto di rimanere sempre legate a coppie di segno opposto nei dipoli magnetici

Sfera uniformemente magnetizzata (es. magnete permanente)

a)Campo interno: determinato dalla densita' di corrente di magnetizzazione efficace sulla superficie della sfera, equivalente a una distribuzione superficiale di poli magnetici



$\sigma_m = \boldsymbol{M} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = M \cos\theta,\ \ \hat{\boldsymbol{n}}$ versore normale alla superficie

Contributo elementare al campo al centro della sfera:

$$d\boldsymbol{H} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\sigma_m dA}{R^2}\hat{\boldsymbol{n}} = -\frac{1}{4\pi}\frac{M\cos\theta R^2 d\Omega}{R^2}\hat{\boldsymbol{n}} = -\frac{1}{4\pi}M\cos\theta d\Omega\hat{\boldsymbol{n}}$$

Dopo somma vettoriale di tutti i contributi: solo componente lungo $\boldsymbol{M} \parallel z$

$$H = \int dH_{\parallel} = -\frac{M}{4\pi}\int \cos^2\theta d\Omega = -\frac{M}{2}\int_{-1}^{+1}\cos^2\theta d\left(\cos\theta\right) = -\frac{M}{2\cdot 3}\cos^3\theta\Big|_{-1}^{+1} = -\frac{M}{3}$$

$\rightarrow \boldsymbol{H} = -\frac{1}{3}\boldsymbol{M},$ e si puo' dimostrare che e' uniforme entro la sfera

$$\boldsymbol{H} = -\frac{1}{3}\boldsymbol{M}$$

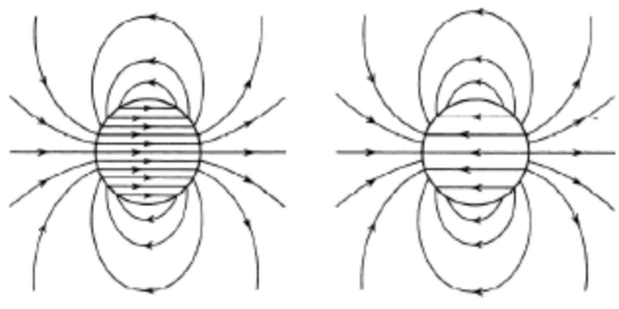
$$\boldsymbol{B} = \mu_0\left(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}\right) = \mu_0\left(-\frac{1}{3}\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}\right) = \mu_0\frac{2}{3}\boldsymbol{M}$$ Uniforme anche $\boldsymbol{B}$

Notare: $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{H}$ all'interno hanno verso opposto

b) Campo esterno: puro dipolo magnetico

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{4}{3}\pi R^3\boldsymbol{M}$$ Mom. di dipolo equivalente

Situazione simile (ma non identica!) a quella di una sfera dielettrica polarizzata



B H

Per dissipare un equivoco potenziale:
Nell'esempio non ci sono correnti vere, tuttavia $\boldsymbol{H}$ e' diverso da 0!
Come mai? Nulla di strano: l'assenza di correnti vere determina solo

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

Ma un campo vettoriale non e' determinato dal solo rotore: in generale riceve contributi anche dalla divergenza (vedi eq. di Maxwell)
Quindi non c'e' contraddizione fra assenza di correnti vere e campo $\boldsymbol{H}$ non nullo: disomogeneita' in $\boldsymbol{M}$ agiscono come sorgenti di $\boldsymbol{H}$. Infatti:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = \nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \right) = -\nabla \cdot \boldsymbol{M}$$

Quindi: $\nabla \cdot \boldsymbol{M} \neq 0 \rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{H} \neq 0$

Sfera paramagnetica in campo esterno uniforme $\boldsymbol{B_0}$

La sfera si magnetizza in conseguenza della presenza del campo esterno
Si puo' mostrare che la magnetizzazione e' uniforme
Sommiamo formalmente il campo esterno con il campo di una sfera uniformemente magnetizzata:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{B}_{in} &= \boldsymbol{B}_0 + \frac{2\mu_0}{3}\boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{H}_{in} &= \frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0} - \frac{\boldsymbol{M}}{3} \end{aligned}\right\} \text{all'interno della sfera}$$

Inoltre deve valere, all'interno della sfera:

$$\boldsymbol{B}_{in} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H}_{in}$$

per un materiale magnetico lineare e isotropo ($\leftarrow$ non ferromagnetico!)

Quindi:

$$\boldsymbol{B}_0 + \frac{2\mu_0}{3}\boldsymbol{M} = \mu_0\mu_r\left(\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0} - \frac{\boldsymbol{M}}{3}\right)$$

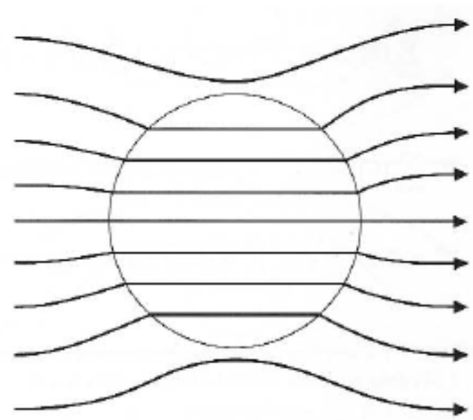
$$\rightarrow \boldsymbol{M} = \frac{3}{\mu_0}\left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2}\right)\boldsymbol{B}_0$$

Risultato analogo alla polarizzazione di una sfera dielettrica in un campo elettrico esterno uniforme

Nota: anche per la magnetizzazione vale il risultato che un campione di forma ellissoidale puo' essere magnetizzato uniformemente

Campo totale in ogni punto:

$\boldsymbol{B}_{tot} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_{sfera}$, dove $\boldsymbol{B}_{sfera}$ e' quello trovato prima



Risultato non valido per ferromagneti (←non lineari)

Confronto fra i 3 vettori elettrici e magnetici

Materiale *lineare, isotropo*

Relazioni fra i vettori elettrici:

$$\underbrace{\boldsymbol{D}}_{\substack{\text{cariche}\\\text{vere}}} = \varepsilon_0 \underbrace{\boldsymbol{E}}_{\substack{\text{tutte}\\\text{le cariche}}} + \underbrace{\boldsymbol{P}}_{\substack{\text{cariche}\\\text{polarizzazione}}}$$

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi \boldsymbol{E} \qquad \chi = n\alpha \approx n\left(4\pi R^3 + \frac{1}{3\varepsilon_0}\frac{p^2}{kT}\right) > 0$$

$$\rightarrow \boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \varepsilon_0 \chi \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 (1+\chi)\boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon_0} - \boldsymbol{P}$$

Il campo creato dalle cariche di polarizz. si *sottrae* da quello esterno (sempre)

Relazioni fra i vettori magnetici:

$$\underbrace{\boldsymbol{H}}_{\substack{\text{correnti}\\\text{vere}}} = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\boldsymbol{B}}_{\substack{\text{tutte}\\\text{le correnti}}} - \underbrace{\boldsymbol{M}}_{\substack{\text{correnti}\\\text{magnetizzazione}}}$$

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\chi_m}{1+\chi_m}\boldsymbol{B} \qquad \frac{\chi_m}{1+\chi_m} \approx n\mu_0\left(\frac{\mu^2}{3kT} - \frac{Zer^2}{6m_e}\right), \chi_m > opp. < 0$$

$$\rightarrow \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \frac{1}{\mu_0}\frac{\chi_m}{1+\chi_m}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{1+\chi_m}\right)\boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu_0\mu_r}\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$$

Il campo creato dalle correnti di magnetizz. si *somma* a quello esterno (ma: attenzione al segno di χ_m!)

Magnetostatica nei mezzi materiali

Vuoto:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}_{est} \end{cases}$$

Materiale:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{j}_{est} + \boldsymbol{j}_m \right) \end{cases}$$

Definizione di ***H***:

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_{est}$$

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \boldsymbol{B}$$

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H}$$ Relazione costitutiva

Elettrostatica nei mezzi materiali

Vuoto:

$$\begin{cases} \nabla \cdot E = \dfrac{\rho_{est}}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times E = 0 \end{cases}$$

Materiale:

$$\begin{cases} \nabla \cdot E = \dfrac{\rho_{est} + \rho_{pol}}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times E = 0 \end{cases}$$

Definizione di *D*:

$$D = \varepsilon_0 E + P$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot D = \dfrac{\rho_{lib}}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times E = 0 \end{cases}$$

$$P = \varepsilon_0 \chi E = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E$$

$$\varepsilon_r = 1 + \chi$$

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$$ Relazione costitutiva

Significato delle equazioni

1) Campo elettromagnetico in un materiale: descritto da 4 vettori

E*,*D*; *B*,*H

2) ***D*,*H*** vettori ausiliari; definiti da *relazioni costitutive* rispetto a ***E*,*B***
(empiriche/ funzioni di T, ω/ legate a struttura microscopica)

3) Comportamento di ***D*,*H***

Divergenza di ***D***
Rotore di ***H***

legati a sole sorgenti vere: semplice

Tuttavia, un campo vettoriale e' noto se sono noti *divergenza E rotore*

Equazioni di Maxwell nei mezzi materiali

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{lib}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{lib} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H}$$

Nel caso piu' semplice:

ε,μ scalari, indipendenti da ***E,B***, indipendenti da *T*, indipendenti da ω