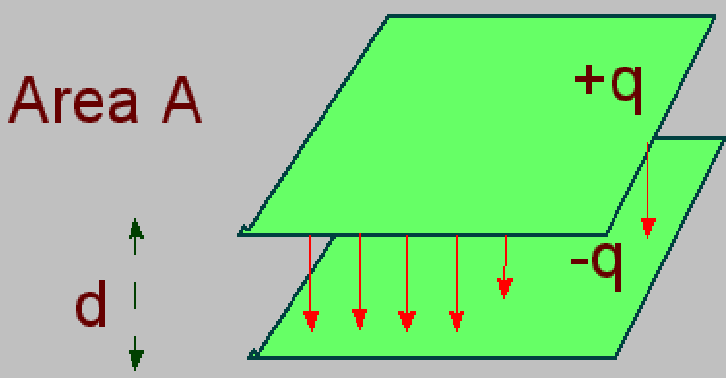
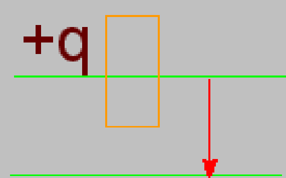
Condensatore piano





Sup. gaussiana

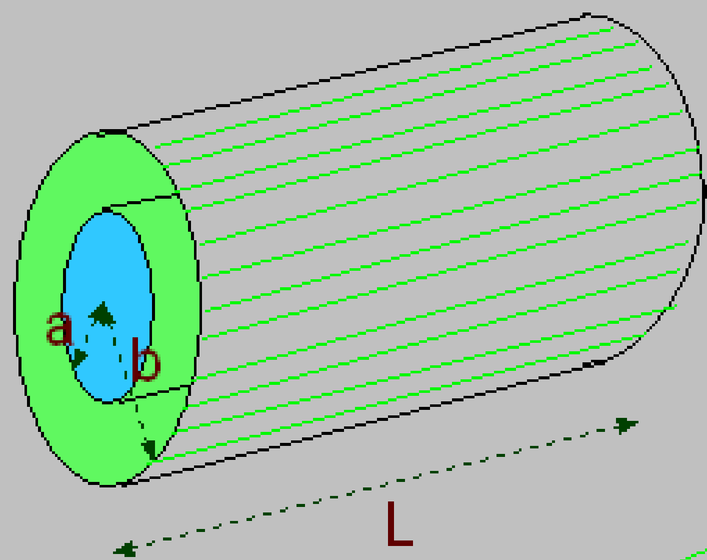
$$\sigma = \frac{q}{A}$$

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0} = E\Delta S \rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

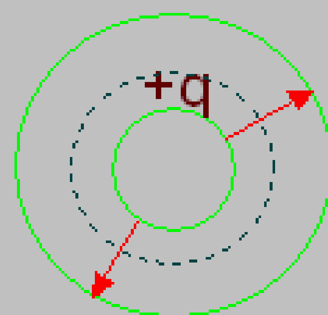
$$\rightarrow V = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^d E dz = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{q}{V} = \varepsilon_0 \frac{\sigma A}{\sigma d} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

Condensatore cilindrico



Sup. gaussiana coassiale ai cilindri:

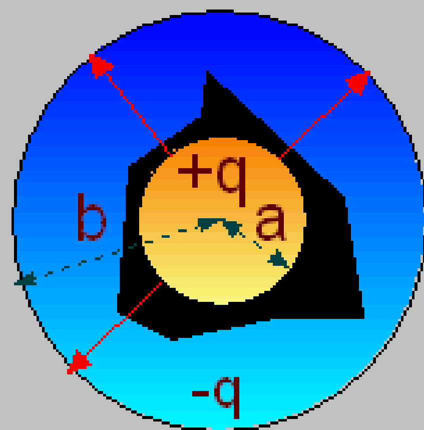


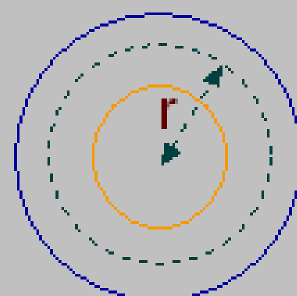
$$\Phi(\mathbf{E}) = 2\pi r L E = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{q}{2\pi r L \varepsilon_0}$$

$$V = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{2\pi L \varepsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi L \varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\rightarrow C = \frac{q}{V} = \frac{2\pi L \varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Condensatore sferico





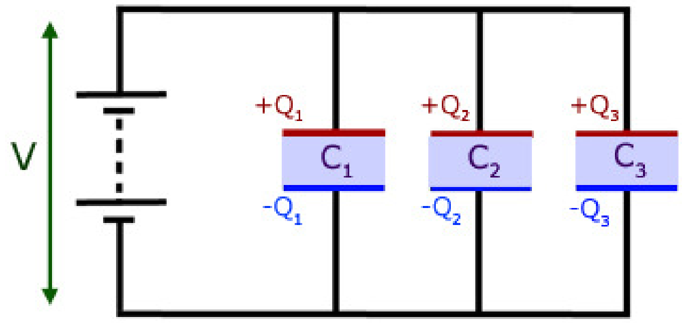
Sup. gaussiana:

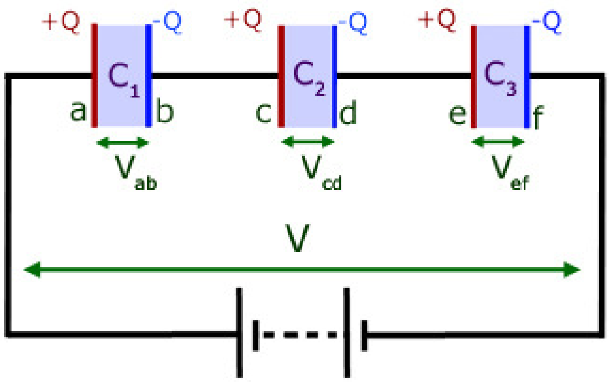
$$\Phi(E) = \frac{q}{\varepsilon_0} = 4\pi r^2 E \rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

$$V = \int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \int_a^b E\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{1}{r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_a^b$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$\rightarrow C = \frac{q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$





Condensatori in parallelo:

Stessa differenza di potenziale per i 2

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1 = C_1 V \\ q_2 = C_2 V \end{array}\right\} \rightarrow Q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)V \rightarrow C = C_1 + C_2$$

Condensatori in serie:

Stessa carica sui 2

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} V_1 = \dfrac{q}{C_1} \\ V_2 = \dfrac{q}{C_2} \end{array}\right\} \rightarrow V = V_1 + V_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \rightarrow \frac{q}{V} = \frac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}} \rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Estensione a n condensatori in parallelo o in serie

En. spesa per caricare un condensatore: Trasporto di carica da un'armatura all'altra

Sottrazione di carica +va da armatura n. 1 $\rightarrow$ Accumulo di carica $-$va

Aggiunta di carica +va ad armatura n. 2 $\rightarrow$ Accumulo di carica +va

$\rightarrow$ Comparsa di una ddp fra le armature

Ad un istante qualsiasi durante il processo: $ddp = V' = \dfrac{q'}{C}$

Armatura n. 1: $-dq'$

Armatura n. 2: $+dq'$

$\rightarrow dW = V'dq' = \dfrac{q'}{C}dq'$ lavoro elementare

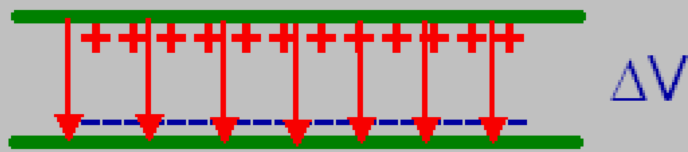
$$\rightarrow W = \int_0^q \frac{q'}{C}dq' = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$$

Lavoro totale = En . potenziale elettrostatica, immagazzinata...

$$\begin{cases} \text{Fra le cariche +ve e } -\text{ve sulle armature...} \\ \text{...oppure...} \\ \text{...Nello spazio fra le armature, dove c'e' un c. elettrico} \end{cases}$$

Descrizioni equivalenti in elettrostatica, non in elettrodinamica

Energia di un condensatore



$$Q = CV$$

$$U = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C \left(\Delta V \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

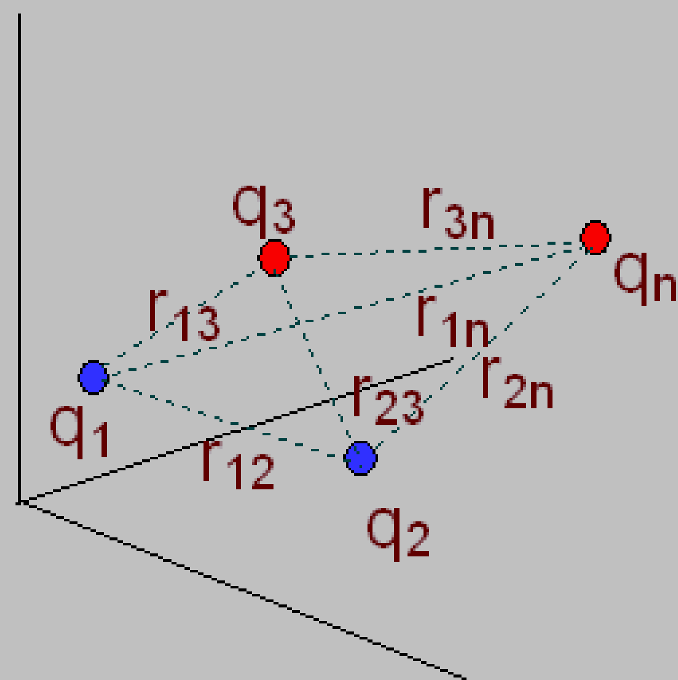
Densita' di energia:

$$u = \frac{U}{volume} = \frac{\frac{1}{2} C \left(\Delta V \right)^2}{Ad} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{A}{d} \left(\Delta V \right)^2 \frac{1}{Ad}$$

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{\Delta V}{d} \right)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Risultato generale , valido per *ogni* campo elettrico

Energia di un insieme di cariche - 1



En. potenziale di j nel campo di i:

$$U_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_{ij}}q_j$$

Situazione simmetrica:

$$U_{ji} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{ij}}q_i$$

En. effettiva coppia:

$$U_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Energia di un insieme di cariche - 2

Se considero N cariche:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{q_j}{r_{ij}} \right)$$

(Fattore che evita di contare 2 volte ogni coppia...)

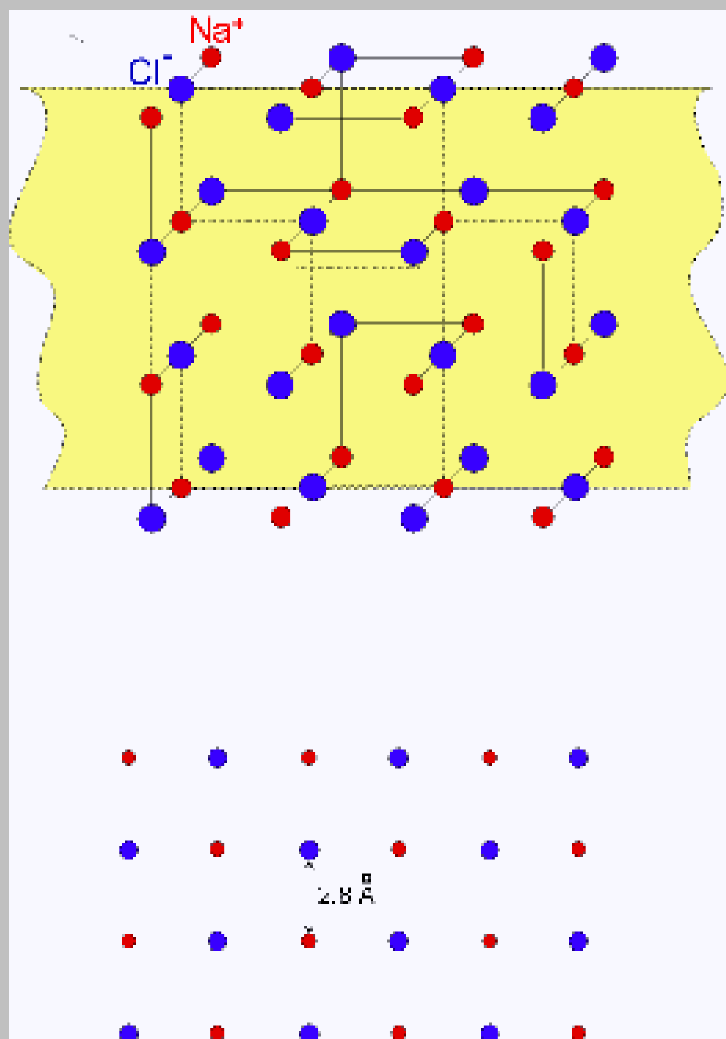
Si puo scrivere:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i$$

(Potenziale totale nel punto in cui sta q_i)

Esempio di distribuzione discreta di carica

Cristallo ionico: sale da cucina



(Da V.Gracco, Fis. generale II)

Distribuzione continua di carica

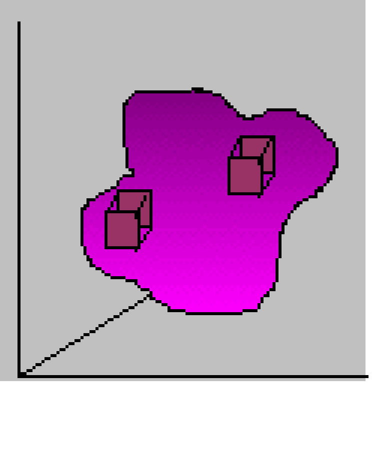
Suddivisione ideale del volume carico in cellette:

$$\Delta q_i = \rho_i \underbrace{\Delta v_i}_{vol.celletta}$$

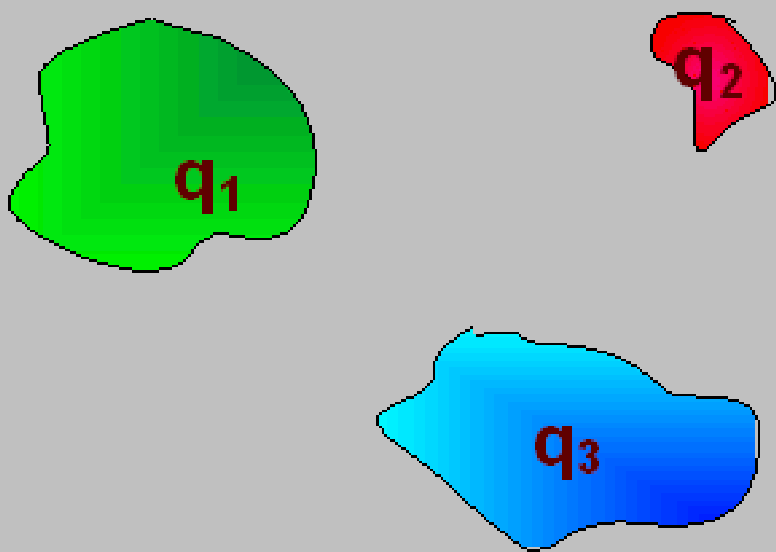
$$\rightarrow U \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Delta q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N}\frac{\Delta q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Delta q_i V_i$$

$$U \rightarrow \frac{1}{2}\iiint \rho V dxdydz$$

Somma su tutte le coppie di cellette:
En. potenziale della configurazione di carica



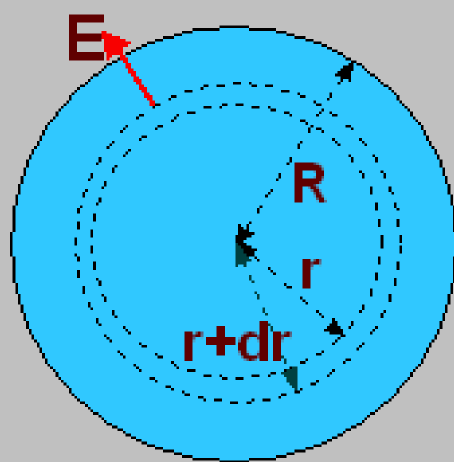
Energia di un sistema di conduttori



$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i$$

Situazione di equilibrio: ogni potenziale fissato dall'insieme delle cariche

Distribuzione sferica di carica-1



Teo. di Gauss:

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \rightarrow \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}$$

$r \leq R:$

$$\Phi(\mathbf{E}) = E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{\varepsilon_0}q\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3} \equiv \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

$r \geq R:$

$$\Phi(\mathbf{E}) = E 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \equiv \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Distribuzione sferica di carica - 2

Potenziale al raggio r:

$$V(r) = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_r^\infty E dr$$

$$V(r) = \int_r^R E dr + \int_R^\infty E dr = \int_r^R \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr + \int_R^\infty \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$V(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{r^2}{2}\bigg|_r^R + \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\bigg|_R^\infty = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3}{2}R^2 - \frac{1}{2}r^2\right)$$

Energia potenziale:

$$U = \frac{1}{2}\iiint_{\substack{volume\\cariche}} \rho(x,y,z) V(x,y,z)\, dxdydz$$

$$= \frac{1}{2}\iiint_{\substack{volume\\cariche}} \frac{\rho^2}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3}{2}R^2 - \frac{1}{2}r^2\right) \underbrace{dxdydz}_{r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi}$$

Distribuzione sferica di carica - 3

Integrale (doppio) sugli angoli
Integrale (semplice) radiale
fra 0 e R (fuori dalla sfera ρ=0)

$$U = \rho \frac{1}{2} \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \iint_{\substack{\text{angolo}\\ \text{solido}}} \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \int_0^R \left(\frac{3}{2} R^2 - \frac{1}{2} r^2 \right) r^2 dr$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{3\varepsilon_0} 4\pi \left(\frac{3}{2} R^2 \frac{R^3}{3} - \frac{1}{2} \frac{1}{5} R^5 \right) = \frac{4\pi\rho^2}{6\varepsilon_0} R^5 \frac{2}{5} = \frac{4\pi\rho^2}{15\varepsilon_0} R^5$$

Proporzionalita' a q^2:
effetto dell'interazione carica-carica

Es.: En. elettrostatica in un condensatore sferico, sfere a potenziale fisso

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{fra le armature}$$

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^4} = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}$$

$$\rightarrow U = \int_V u_E dV = \int_V \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} dV = \int_V \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \int_V \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} r^2 dr d\Omega$$

$$\rightarrow U = 4\pi \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0} \int_{R_A}^{R_B} \frac{1}{r^4} r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)_{R_A}^{R_B} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$$

Es.: Sfere cariche lontane l'una dall'altra

$$U_e = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2$$

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 d} \\ V_2 &= \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 d} \end{aligned}\right\}, \quad d \gg R_1, R_2$$

$$\rightarrow U_e = \frac{1}{2} q_1 \left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}\right) + \frac{1}{2} q_2 \left(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 d}\right) = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

Es.: Raggio classico dell'elettrone

$$U_e = \frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = mc^2 \rightarrow R = \frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} \sim 1.710^{-15}\ m$$