

## Bilancio energetico e forze in elettrostatica

1) Condensatore piano a  $q$  costante:

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} h$$

Variatione della distanza:

$$dU_e = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} dh$$

$$dW = -dU_e = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 S} dh = Fdh$$

$$\rightarrow F = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 S} = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 S^2} S = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} S$$

Generalizzazione 3D:

$$F = -\frac{dU_e}{dh} \rightarrow \mathbf{F} = -\nabla U_e$$

2) Condensatore piano a  $V$  costante:

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} h$$

Variatione della distanza:

$$dU_e = d\left(\frac{1}{2} CV^2\right) = \frac{1}{2} V^2 dC$$

$$dC = d\left(\frac{\epsilon_0 S}{h}\right) = -\frac{\epsilon_0 S}{h^2} dh$$

$$\rightarrow dU_e = -\frac{1}{2} V^2 \frac{\epsilon_0 S}{h^2} dh$$

$$\rightarrow F = -\frac{dU_e}{dh} = -\left(-\frac{1}{2} V^2 \frac{\epsilon_0 S}{h^2}\right) = +\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} S !$$

Come prima, ma col segno opposto: ?!

Attenzione: a  $V$  costante occorre collegare un generatore alle armature

→ Durante lo spostamento la carica varia

→ Movimento di cariche → Lavoro del generatore

$$dQ = VdC \rightarrow dW = -VdQ = -V^2 dC = -\left(-V^2 \frac{\epsilon_0 S}{h^2} dh\right) \rightarrow \frac{dW}{dh} = V^2 \frac{\epsilon_0 S}{h^2}$$

Per  $F$  occorre la derivata rispetto allo spostamento di *tutta* l'energia del sistema :

$$F = -\left(\frac{dU_e}{dh} + \frac{dW}{dh}\right) = -\left(-\frac{1}{2} V^2 \frac{\epsilon_0 S}{h^2} + V^2 \frac{\epsilon_0 S}{h^2}\right) = -\frac{1}{2} V^2 \frac{\epsilon_0 S}{h^2} = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} S \quad \text{OK}$$

## Operazioni sui campi vettoriali

Operatore *nabla*  
(come un vettore)

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}$$

Applicato a un campo scalare (ossia una funzione  $f(x,y,z)$ ) produce un campo vettoriale, il gradiente di  $f$ :

$$\nabla f(x, y, z) = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{A}(x, y, z)$$

Significato di gradiente: vettore che indica la direzione di max. variazione di  $f$ , e l'entità della variazione

Campo elettrostatico:

$$\nabla V(x, y, z) = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial V}{\partial z} = -\mathbf{E}(x, y, z)$$

# Divergenza

Applichiamo l'operatore nabla ad un campo vettoriale

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(x, y, z) = \left( \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\hat{\mathbf{i}} A_x + \hat{\mathbf{j}} A_y + \hat{\mathbf{k}} A_z)$$
$$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

perche'

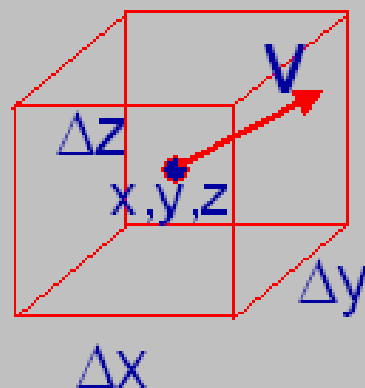
$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1, \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$$

Produce una funzione scalare, la *divergenza* del campo vettoriale

# Significato geometrico della divergenza

Divergenza:

$$\lim_{\text{volume} \rightarrow 0} \frac{\Phi_S(\mathbf{V})}{\text{volume}} = \nabla \cdot \mathbf{V}$$



Infatti, per un elemento di volume cubico:

$$\Phi_{\Delta y \Delta z}(\mathbf{V}) = \mathbf{V}(x + \frac{1}{2} \Delta x, y, z) \cdot (\Delta y \Delta z) \hat{\mathbf{i}} - \mathbf{V}(x - \frac{1}{2} \Delta x, y, z) \cdot (\Delta y \Delta z) \hat{\mathbf{i}}$$

$$\mathbf{V}(x + \frac{1}{2} \Delta x, y, z) \approx \mathbf{V}(x, y, z) + \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} \frac{1}{2} \Delta x \right) \hat{\mathbf{i}} + \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} \frac{1}{2} \Delta x \right) \hat{\mathbf{j}} + \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} \frac{1}{2} \Delta x \right) \hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{V}(x - \frac{1}{2} \Delta x, y, z) \approx \mathbf{V}(x, y, z) - \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} \frac{1}{2} \Delta x \right) \hat{\mathbf{i}} - \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} \frac{1}{2} \Delta x \right) \hat{\mathbf{j}} - \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} \frac{1}{2} \Delta x \right) \hat{\mathbf{k}}$$

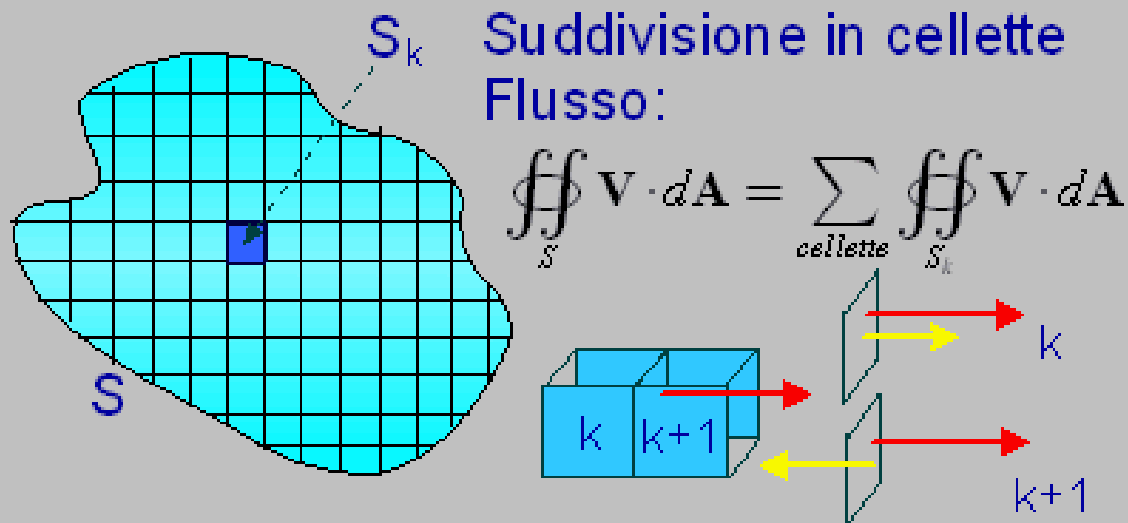
$$\rightarrow \Phi_{\Delta y \Delta z}(\mathbf{V}) \approx \frac{\partial V_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\rightarrow \Phi_{\text{cubo}}(\mathbf{V}) \approx \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\rightarrow \lim_{\text{volume} \rightarrow 0} \frac{\Phi_{\text{cubo}}(\mathbf{V})}{\text{volume}} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{V}$$

# Teorema della divergenza-1

Volume qualsiasi, limitato da una superficie  $S$ :  
 flusso di un campo vettoriale attraverso  $S$



Contributi di cellette contigue si annullano  
 Resta solo la superficie esterna

$$\sum_{\text{cellette}} \oiint_{S_k} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = \sum_{\text{cellette}} \oiint_{S_k} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} \frac{\Delta v_k}{\Delta v_k} = \sum_{\text{cellette}} \oiint_{S_k} \frac{\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}}{\Delta v_k} \Delta v_k$$

Nota anche come *Teorema di Gauss-Ostrogradskij*

## Teorema della divergenza-2

Proprieta' generale di un campo vettoriale:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cellette}} \iint_{S_k} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} &= \sum_{\text{cellette}} \iint_{S_k} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} \frac{dv_k}{dv_k} \\ &= \sum_{\text{cellette}} \frac{\iint_{S_k} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}}{dv_k} dv_k = \sum_{\text{cellette}} \nabla \cdot \mathbf{V} dv_k \rightarrow \iiint_{\text{volume}} \nabla \cdot \mathbf{V} dv \\ &\rightarrow \iint_{\text{Superficie}} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_{\text{volume}} \nabla \cdot \mathbf{V} dv \end{aligned}$$

Per il campo elettrico

$$\iint_{\text{Superficie}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\text{volume}} \rho dv = \iiint_{\text{volume}} \nabla \cdot \mathbf{E} dv$$

$$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{I eq. di Maxwell}$$

$$\text{Esplicitamente: } \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

# Rotore

Divergenza: "prodotto interno"

$$\nabla \cdot \mathbf{V}$$

Rotore: "prodotto esterno"

$$\nabla \times \mathbf{V}$$

Esplicitamente:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Applicato a un vettore, produce un vettore

# Significato geometrico del rotore

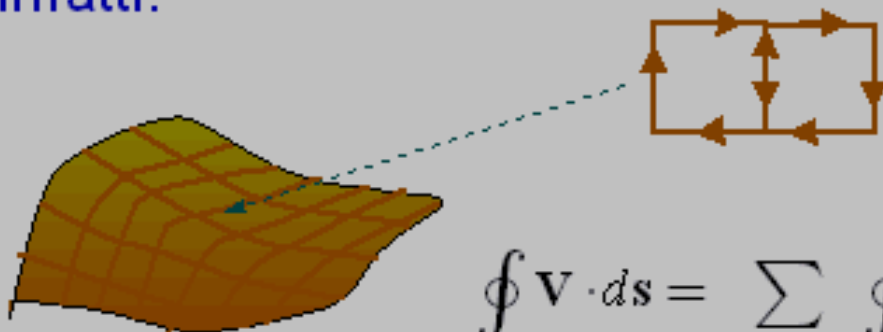
Superficie S  
Curva L



Circuitazione del campo lungo una curva chiusa L che racchiude una superficie S

Definizione:  $(\text{rotore})_{\mathbf{n}} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}}{S} = (\nabla \times \mathbf{V})_{\mathbf{n}}$

Infatti:

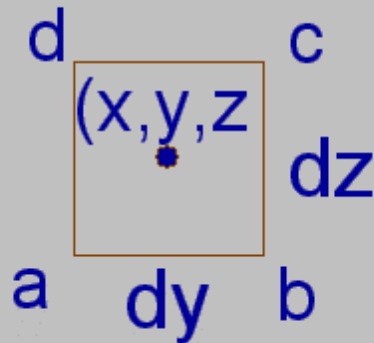


$$\oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{\text{quadrati}} \oint_{L_k} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$$

perche' i lati interni si compensano



# Elemento di superficie



$$ds_{ab} = dy\mathbf{j}$$

$$ds_{bc} = dz\mathbf{k}$$

$$ds_{cd} = -dy\mathbf{j}$$

$$ds_{da} = -dz\mathbf{k}$$

$$\oint_{ab} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \approx \left[ A_y(x, y, z) - \frac{\partial A_y}{\partial z} \frac{1}{2} \Delta z \right] \Delta y$$

$$\oint_{bc} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \approx \left[ A_z(x, y, z) + \frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{1}{2} \Delta y \right] \Delta z$$

$$\oint_{cd} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \approx - \left[ A_y(x, y, z) + \frac{\partial A_y}{\partial z} \frac{1}{2} \Delta z \right] \Delta y$$

$$\oint_{da} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \approx - \left[ A_z(x, y, z) - \frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{1}{2} \Delta y \right] \Delta z$$

$$\rightarrow \oint_{abcda} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \approx \left[ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \frac{\Delta y \Delta z}{S_k} \rightarrow \frac{1}{S_k} \oint_{abcda} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \approx \left[ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right]$$

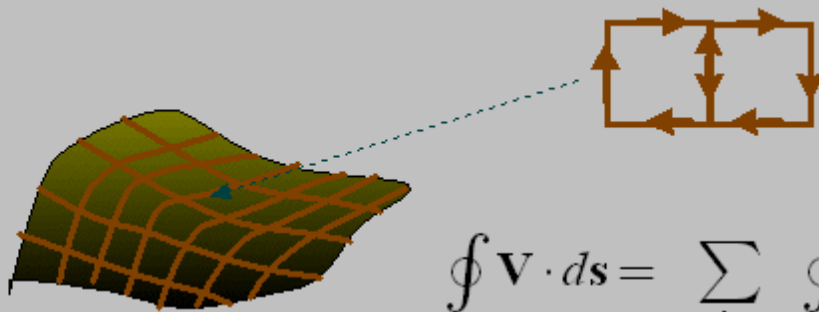
Quindi

$$\text{rotore di } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$$

# Teorema del rotore

$$\oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{A}$$

Infatti:



$$\oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{\text{quadrati}} \oint_{L_k} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$$

perche' i lati interni si compensano

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} &= \sum_k \oint_{L_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \approx \sum_k \frac{1}{S_k} \oint_{L_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} S_k = \sum_k \oint_{L_k} \frac{\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}{S_k} \underbrace{S_k}_{\text{area proiettata}} \\ \rightarrow \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} &= \sum_k \iint_{S_k} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}_k = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

Per il campo elettrostatico:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S}$$

$\rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = 0$  II equazione di Maxwell  
(in assenza di correnti variabili)

Nota anche come *Teorema di Kelvin-Stokes*

## Prime 2 equazioni di Maxwell

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \text{ forma integrale}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ forma differenziale}$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \text{ forma integrale}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \text{ forma differenziale}$$

*La seconda e' in forma  
provvisoria: solo per campi statici*

Problema generale dell'elettrostatica:

Trovare  $V$  (e quindi  $\mathbf{E}$ ) in una regione spaziale, nota la distribuzione di carica

Uso degli operatori differenziali:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla V \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \right\} \rightarrow \nabla \cdot (-\nabla V) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Eq. di Poisson}$$

Sol. generale eq. di Poisson:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{volume}} \frac{\rho(x', y', z')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' dy' dz'$$

Spesso problema riformulato come:

Trovare  $V$  (e quindi  $\mathbf{E}$ ) in una regione spaziale, note la posizioni, la forma e la carica (o il potenziale) dei corpi conduttori presenti.

Riformulazione necessaria perche' in presenza di conduttori

la densita' di carica *non* e' nota a priori ( $\leftarrow$  Ind. elettrostatica)

Escluse le superficie dei conduttori, dove  $\rho = 0$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{E} \text{ campo solenoidale} (\equiv \text{privo di sorgenti})$$

$$\rightarrow \nabla^2 V = 0 \quad \text{Eq. di Laplace}$$

Eq. di Laplace: Eq. differenziale alle derivate parziali, di tipo ellittico

Noti il valore di  $V$ , o  $\mathbf{E}$ , sulla frontiera della regione spaziale considerata, sotto condizioni 'poco' restrittive:

Teo. di *esistenza e unicita'* delle soluzioni

Base del *metodo delle immagini*

Utile nei problemi con cariche puntiformi e corpi conduttori

Metodo delle (cariche) immagini:

*Sostituzione del conduttore con insieme di cariche puntiformi posizionate fuori dalla regione in cui si determina il potenziale, e tali da produrre una superficie equipotenziale coincidente con quella del conduttore stesso*

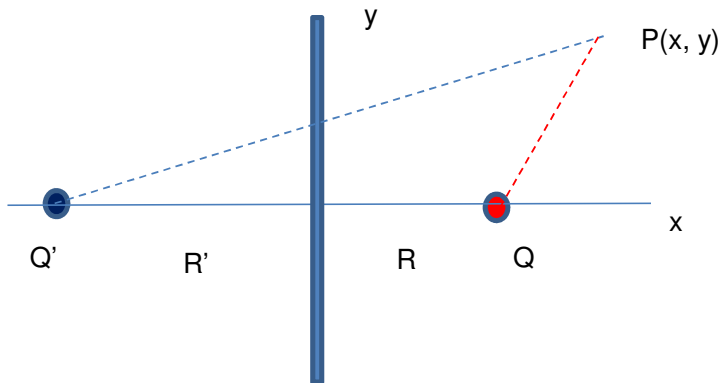
Infatti: Teo. di esistenza e unicità' →

Pot. generato dalle cariche immagini + cariche vere

=

Pot. del problema originario, fuori dal conduttore

Es Carica puntiforme sopra piano conduttore



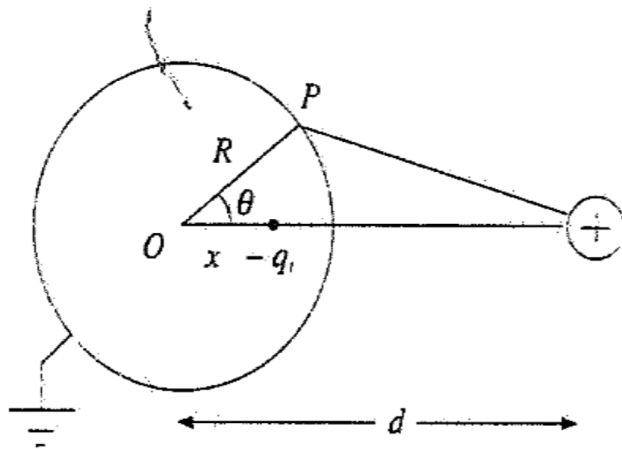
$$V(x, y, z) = \frac{Q}{\left[ (x-R)^2 + y^2 \right]^{1/2}} + \frac{Q'}{\left[ (x+R')^2 + y^2 \right]^{1/2}}$$

$$\rightarrow V(0, y, z) = \frac{Q}{\left[ R^2 + y^2 \right]^{1/2}} + \frac{Q'}{\left[ R'^2 + y^2 \right]^{1/2}} = 0 \rightarrow \begin{cases} Q = -Q' \\ R = R' \end{cases} \text{ OK}$$

→ Unica soluzione!

$$\rightarrow V(x, y, z) = Q \left[ \frac{1}{\left[ (x-R)^2 + y^2 \right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[ (x+R)^2 + y^2 \right]^{1/2}} \right]$$

Es: Carica puntiforme e sfera conduttrice a  $V = 0$



$q$  su asse  $x$  a distanza  $d$  dal centro della sfera

$q_{imm} = -yq$   
 $q_{imm}$  su asse  $x$  a distanza  $x$  dal centro della sfera
  $\left. \vphantom{\begin{matrix} q_{imm} = -yq \\ q_{imm} \text{ su asse } x \text{ a distanza } x \end{matrix}} \right\} \rightarrow V(P) = 0 \text{ se } P \text{ sulla sfera}$

$$\rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{(d^2 + R^2 - 2dR \cos \theta)^{1/2}} - \frac{yq}{(x^2 + R^2 - 2xR \cos \theta)^{1/2}} \right] = 0$$

$$\rightarrow y^2 (d^2 + R^2 - 2dR \cos \theta) = x^2 + R^2 - 2xR \cos \theta$$

Identita' dei polinomi:

$$\rightarrow \left. \begin{matrix} y^2 (d^2 + R^2) = x^2 + R^2 \\ -2y^2 dR \cos \theta = -2xR \cos \theta \end{matrix} \right\} \rightarrow y^2 = \frac{x}{d} \rightarrow \frac{x^2}{d^2} (d^2 + R^2) = x^2 + R^2$$

$$\rightarrow x^2 (d^2 + R^2) = d^2 (x^2 + R^2) \rightarrow x = \begin{cases} d \\ R^2/d \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} 1 \\ R/d \end{cases}$$

I sol: banale  $q_i = -q$ , coincidente con  $q \rightarrow V \equiv 0$  in tutti i punti

$$\text{II sol: } q_i = -\frac{R}{d}q, \quad x_i = \frac{R^2}{d}$$

$$\rightarrow V(r, \theta, \varphi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(d^2 + r^2 - 2dr \cos \theta)^{1/2}} - \frac{1}{\left( \frac{R^4}{d^2} + r^2 - 2r \frac{R}{d} \cos \theta \right)^{1/2}} \right]$$