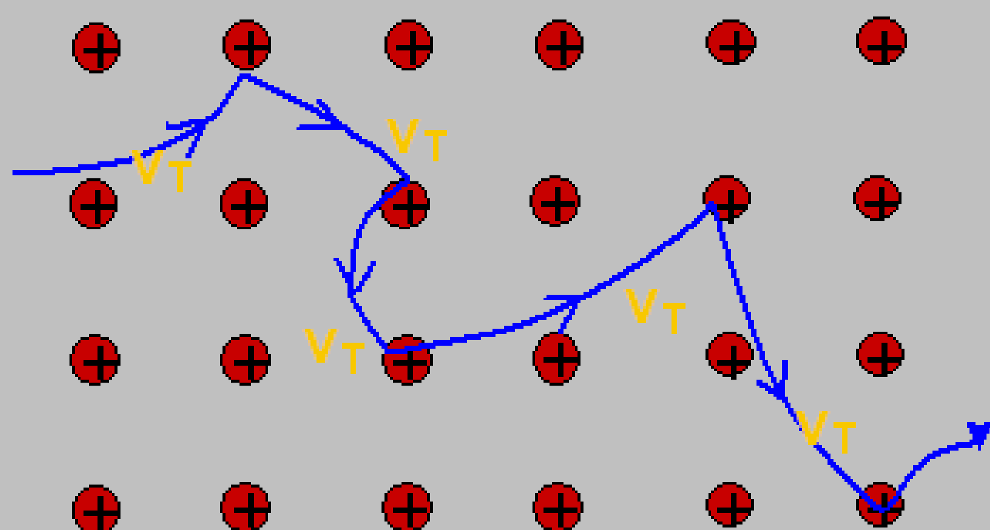
Conduzione elettrica

Moto di cariche

- interno di conduttori
- altro (vuoto, semiconduttori,..)

Necessaria presenza di campi elettrici: situazione stazionaria: *equilibrio*

Elettroni liberi nei conduttori: moto casuale - interazioni termiche con il reticolo ionico: velocita' "termiche"



Velocita' di deriva - 1

Velocita' termica: in media nulla

$$\langle \mathbf{v_T} \rangle = 0$$

Principio di equipartizione dell'energia:

$$\frac{1}{2} m_e \langle \mathbf{v}_T^2 \rangle \sim \frac{3}{2} kT$$

$$\rightarrow \text{vel. quadratica media} \quad \sqrt{\langle \mathbf{v}_T^2 \rangle} \sim \sqrt{\frac{3kT}{m_e}}$$

Ossia: l'elettrone ha velocita' media non nulla in modulo, ma con direzione distribuita in modo casuale.

Con campo esterno:

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - k\mathbf{v}$$

$$\text{direzione trasversale risp. a } \mathbf{E}\text{:} \quad \langle \mathbf{v}_{trasv} \rangle = 0$$

$$\text{direzione longitudinale : } m_e \frac{dv}{dt} = -eE - kv$$

Velocita' di deriva - 2

Equazione del moto longitudinale:

$$\underbrace{m_e}_{\text{massa}} \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{\text{accelerazione}} = \underbrace{-eE}_{\text{forza elettrica}} \underbrace{-kv}_{\text{forza di "attrito"}}$$

Forza di attrito: risultato dell'interazione con il reticolo - quindi di origine elettrica anche lei...
Proporzionale alla velocita'??
Modello semplice:
effetto medio di ogni urto: *perdita di velocita'*
n. urti/secondo: *proporzionale alla velocita'*...

Soluzione eq. differenziale: *v=v(t)*

- equazione dei I ordine, non omogenea
- 1 costante arbitraria
- Sol. generale omogenea+sol.particolare

Velocita' di deriva - 3

Sol. generale equazione omogenea:

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=0 \rightarrow v(t)=v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

Sol. particolare dell'eq. non omogenea:

$$v(t)=\text{cost} \rightarrow \frac{dv}{dt}=0 \rightarrow v(t)=-\frac{eE}{k}$$

Sol. generale dell' eq. non omogenea:

$$v(t)=v_0 e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{eE}{k}$$

Dopo alcune costanti di tempo, la velocita' e' costante e si chiama *velocita' di deriva:*

$$v_{deriva}=-\frac{eE}{k}$$

Digressione su velocita' termiche etc:

Elettroni liberi in un metallo ~ Gas perfetto

$\frac{1}{2}m\left\langle v^2\right\rangle = \frac{3}{2}kT$ statistica di Boltzmann

$\rightarrow \sqrt{\left\langle v^2\right\rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \sim 1.210^5\ ms^{-1}$ vel. termica

Inconsistente con modelli quantistici: richiesta statistica di Fermi-Dirac

In generale:

$\mathbf{v} = \mu\mathbf{E},\ \ \mu$ mobilita' dei portatori

Elettroni (quasi sempre) in un metallo solido/liquido

Corrente dovuta a un solo tipo di portatori

Elettroni + *Ioni* +*vi* in un gas/liquido/solido dielettrico esposto ad agenti ionizzanti

Elettroni + *Lacune* in un semiconduttore

Corrente dovuta a due tipi di portatori

Osservazione:

$$\mathbf{v} = \begin{cases} +\mu_+\mathbf{E}, & q > 0 \\ -\mu_-\mathbf{E}, & q < 0 \end{cases} \rightarrow \mathbf{j} = nq\mathbf{v} \text{ sempre concorde a } \mathbf{E}$$

$\rightarrow$ Normalmente impossibile determinare il segno dei portatori in un conduttore

(Tuttavia, possibile con effetto Hall: uso di un campo magnetico)

$\rightarrow$ Verso della corrente *convenzionale*: da + a −, come se portatori +vi

Modo di vedere la relazione fra vel. di deriva e c. elettrico:

portatore libero si muove sotto l'azione del campo elettrico
acquista q. di moto $\rightarrow$ moto uniformemente accelerato nella direzione di **E**
sovrapposto a moto termico casuale

Urti contro il reticolo ionico: azzeramento vel. di deriva ad ogni urto
q. di moto acquistata fra due urti successivi:
$m\mathbf{v}_d = -e\mathbf{E}\tau,\ \tau$ intervallo di tempo medio fra due urti successivi

$\rightarrow \mathbf{v}_d = -\frac{e\mathbf{E}\tau}{m} = -\frac{e\tau}{m}\mathbf{E} = -\mu\mathbf{E}$
μ mobilita'
$[\mu] = [L]\left[T^{-1}\right]\left[V^{-1}\right][L] \rightarrow$ Unita': $ms^{-1}V^{-1}m = m^2s^{-1}V^{-1}$
$\rightarrow \mathbf{j} = ne\mathbf{v}_d = \frac{ne^2\tau}{m}\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E}$
$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$ conduttivita'
$[\sigma] = \left[L^{-3}\right]\left[I^2\right]\left[T^2\right][T]\left[M^{-1}\right] \rightarrow$ Unita': $A^2kg^{-1}m^{-3}s^3 = AV^{-1}m^{-1}$

Superconduttori: $R = 0$ a basse temperature
Fenomeno quantistico (come tutti gli altri)
Nuovi superconduttori: $T \sim 100K$, poco utilizzati in pratica
Difficolta' a fare cavi lunghi

Definizione di corrente (elettrica):

Δq : quantita' di carica che transita attraverso l'area trasversale del conduttore nel tempo Δt

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

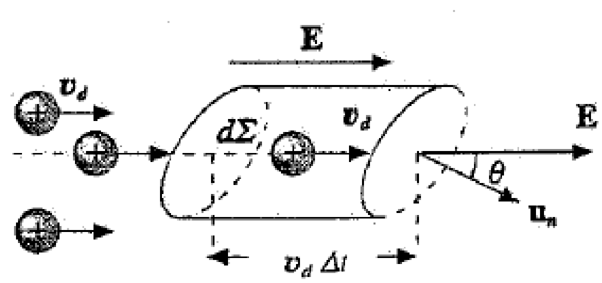
$$d\tau = v_d \Delta t d\Sigma \cos\theta$$

$$\to \Delta q = ne\Delta\tau = nev_d \Delta t d\Sigma \cos\theta$$

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{v}_d$$

$$\to di = \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma$$

$$\to i = \int_\Sigma \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \Phi_\Sigma(\mathbf{j})$$



Corrente e densita' di corrente

Corrente: carica/unita' di tempo

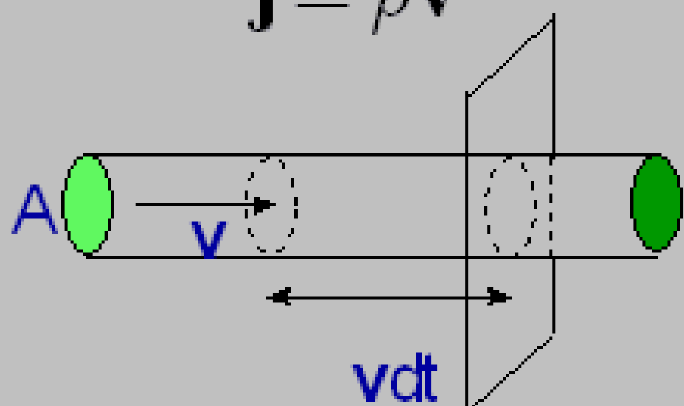
$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Unita' di misura: Ampere

$$1A = 1Cs^{-1}$$

Densita' di corrente:
corrente/area perpendicolare al flusso

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$$

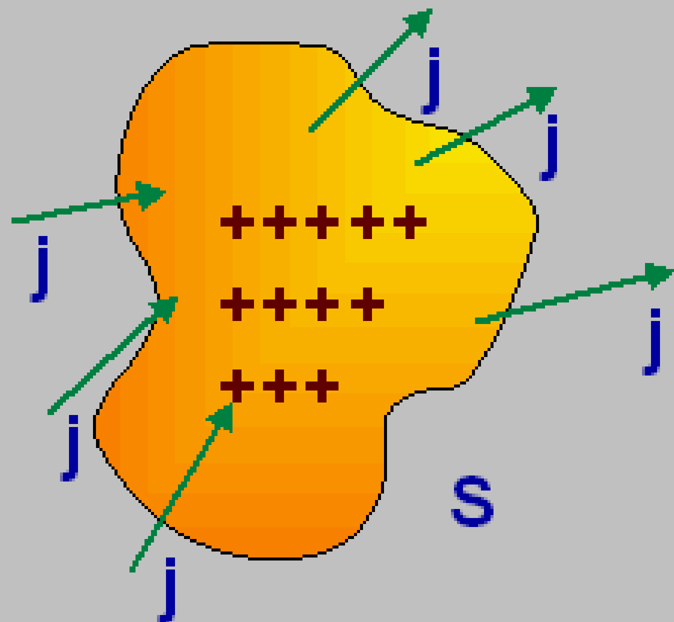


$$dQ = \rho dV = \rho \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}}_{\text{velocita' x area perp.}} dt$$

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \rightarrow dQ = \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dt$$

Conservazione della carica
Equazione di continuita'

Conservazione della carica:



$$\oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{dQ}{dt}, \text{ Q carica dentro S}$$

Per teorema della divergenza:

$$\oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_{volume} (\nabla \cdot \mathbf{j}) dV$$

$$-\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_{volume} \rho dV = \iiint_{volume} \left(-\frac{d\rho}{dt} \right) dV$$

$$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{d\rho}{dt}$$ eq. di continuita'

Passaggio di corrente in conduttori filamentari

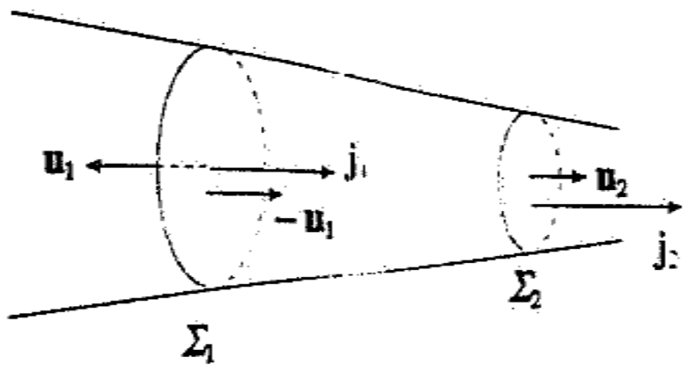
Densita' di corrente $\mathbf{j}$, Sezione variabile

$\oint_V \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n = 0$ condizione di stazionarieta'

$\rightarrow \int_{\Sigma_1} \mathbf{j}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1} \mathbf{j}_2 \cdot \hat{\mathbf{u}}_2 d\Sigma_2 = 0,$ nullo il flusso attraverso la sup. laterale

$$\rightarrow \underbrace{\int_{\Sigma_1} \mathbf{j}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 d\Sigma_1}_{i_1} = -\int_{\Sigma_2} \mathbf{j}_2 \cdot \hat{\mathbf{u}}_2 d\Sigma_2 = \underbrace{\int_{\Sigma_2} \mathbf{j}_2 \cdot (-\hat{\mathbf{u}}_2) d\Sigma_2}_{i_2}$$

$\rightarrow i_1 = i_2$ corrente uguale in tutti i tratti del conduttore



Resistivita'

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$$

$$|\mathbf{v}| = |v_D| = \frac{eE}{k}$$

$$\rho = en$$

$$\rightarrow j = en\frac{eE}{k} = ne^2\frac{E}{k} \equiv \sigma E$$

$$\sigma = \frac{ne^2}{k} \equiv \frac{1}{\rho}$$

Conducibilita' Resistivita'

$$n = \text{n.portatori/volume}$$

Metalli: indipendente da T
Semiconduttori: dipendente da T

Resistenza

Segmento di conduttore

$$j = \sigma E$$

$$i = jA = \sigma EA = \frac{\sigma E \cdot \text{volume}}{d} = \sigma \frac{V}{d^2} \cdot \text{volume}$$

$$i = \frac{1}{\rho d^2} V \cdot \text{volume} \rightarrow V = \frac{\rho d^2 i}{\text{volume}} = \underbrace{\rho \frac{d}{A}}_{R} i$$

R= resistenza

Dipende da :

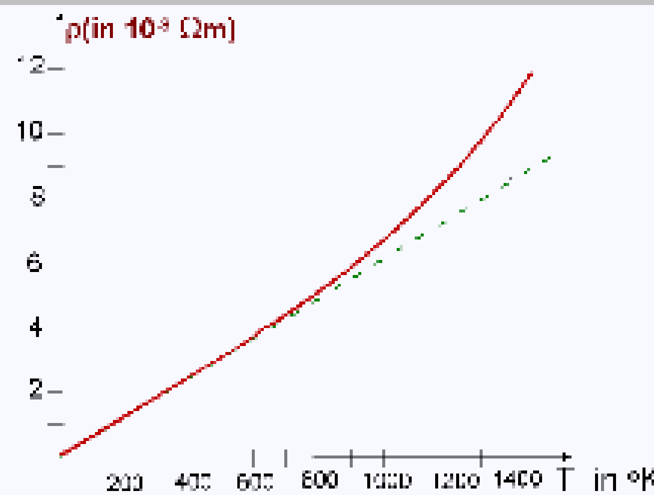
materiale
temperatura
(frequenza del segnale)

Conducibilita'

Valori tipici

materiale	conducibilita' σ(S/m) (T=20°C)
Argento	$6.17\ 10^{7}$
Rame	$5.80\ 10^{7}$
Oro	$4.10\ 10^{7}$
Alluminio	$3.54\ 10^{7}$
Ottone	$1.57\ 10^{7}$
Acqua mare	~ 4
" dolce	$\sim 10^{-3}$
" distillata	$\sim 2\ 10^{-4}$
Terra asciutta	$\sim 10^{-3}$
Vetro	10^{-12}
Ceramica	10^{-13}
Gomma	10^{-13}
Quarzo	10^{-17}

Dipendenza dalla temperatura



$$\rho \cong \rho_0[1+\alpha(T-T_0)]$$

Coefficienti di temperatura

Valori tipici

coefficienti di temperatura

materiale	$\alpha = 10^{-3}$ x
ottone	1
platino	3.6
argento	3.8
oro	3.4
rame	4.0
piombo	4.0
alluminio	4.0
tungsteno	4.5
ferro	5.5
nickel	6.0
nickel-cromo	0.1
manganina	0.001

Potenza dissipata

Corrente: fenomeno granulare
Campo esterno:

esegue lavoro su ogni carica

Lavoro su singola carica:

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{s}}{dt}$$

$$\rightarrow dL = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}dt$$

$$\rightarrow \frac{dL}{dt} = P = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \text{ potenza spesa}$$

Potenza/volume:

$$P = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \frac{\mathbf{E} \cdot nq\mathbf{v}}{n} = \frac{1}{n}\mathbf{E} \cdot \rho\mathbf{v} = \frac{1}{n}\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$$

$$P_{tot} = n\frac{1}{n}\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \text{ per unita' di volume}$$

Potenza in una resistenza

Potenza nel volume di una resistenza:

$$P_R = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} lA = \sigma E^2 lA$$

Ricordando le definizioni

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

$$E = \frac{V}{d}$$

$$P_R = \sigma \frac{V^2}{l^2} lA = \frac{V^2}{\rho l} A = \frac{V^2}{R} = Vi = i^2 R$$

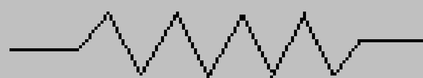
Potenza dissipata in calore: effetto Joule

Dove si sviluppa?

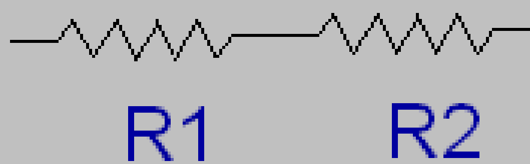
Urti fra elettroni e reticolo ionico

Serie e parallelo

Simbolo della resistenza



Resistenze in serie

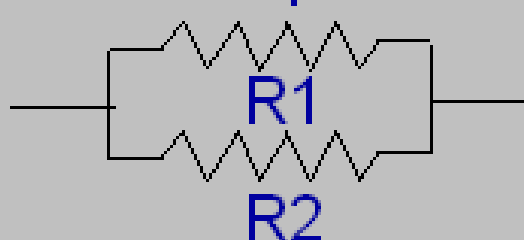


Stessa corrente:

$$V = V_1 + V_2 = iR_1 + iR_2 = i\left(R_1 + R_2\right)$$

$$\rightarrow R_{eff} = R_1 + R_2$$

Resistenze in parallelo:



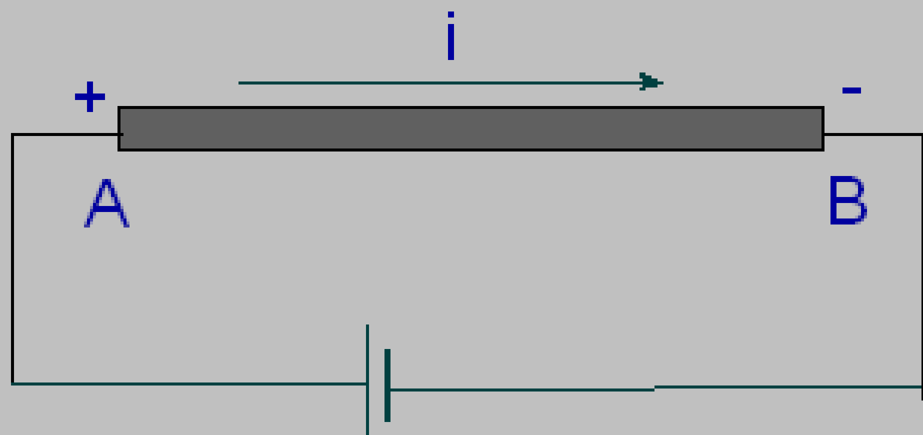
$$i = i_1 + i_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{R_{eff}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Forza elettromotrice - 1

Condizione per passaggio di corrente stazionaria:

differenza di potenziale stazionaria ai capi del conduttore (resistenza)



Generatore di f.e.m.

A spese di qualche sorgente di energia, mantiene le cariche in movimento attraverso la resistenza

Dalla legge di Ohm:

$$V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot ds = Ri$$

Forza elettromotrice - 2

Dentro il conduttore:
E=solo campo elettrostatico

Se considero l'integrale di linea esteso al percorso chiuso (circuito, incluso il generatore) per il campo elettrostatico:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot ds = 0$$

Quindi, devo considerare un campo totale:

$$\mathbf{E}_{tot} = \mathbf{E} + \mathbf{E}^*$$

cosi' da avere:

$$\oint_C \mathbf{E}_{tot} \cdot ds = Ri$$

Quindi:

$$\oint_C \mathbf{E}^* \cdot ds = Ri$$

Forza elettromotrice - 3

Il campo elettromotore **E*** e' tale da soddisfare:

$$\oint_C \mathbf{E}^* \cdot ds = Ri$$

Quindi il campo **E*** *non* e' conservativo. Esso e' presente all'interno del generatore:

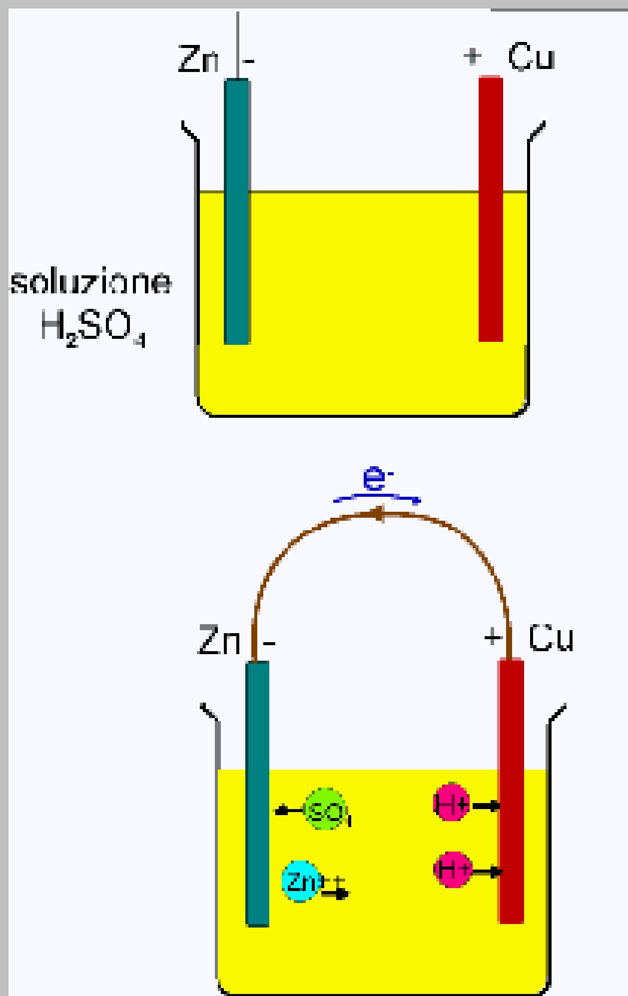
Diverse origini possibili:

elettrochimica (pile, batterie)
campi elettromagnetici variabili
....

Il generatore ha una *resistenza interna*

Batteria

Forza elettromotrice di origine chimica:



Ma: Perche' la soluzione e' dissociata?
Effetto della temperatura: urti molecolari fra solvente e soluto.
Quindi: *interazione elettromagnetica*
(ma non elettrostatica....)