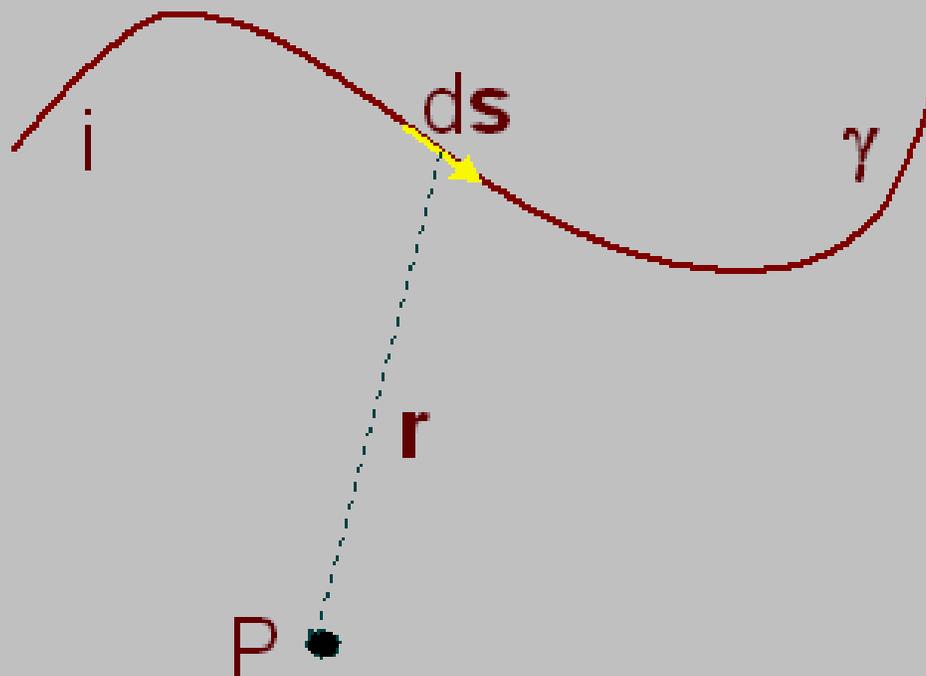


# La legge di Laplace

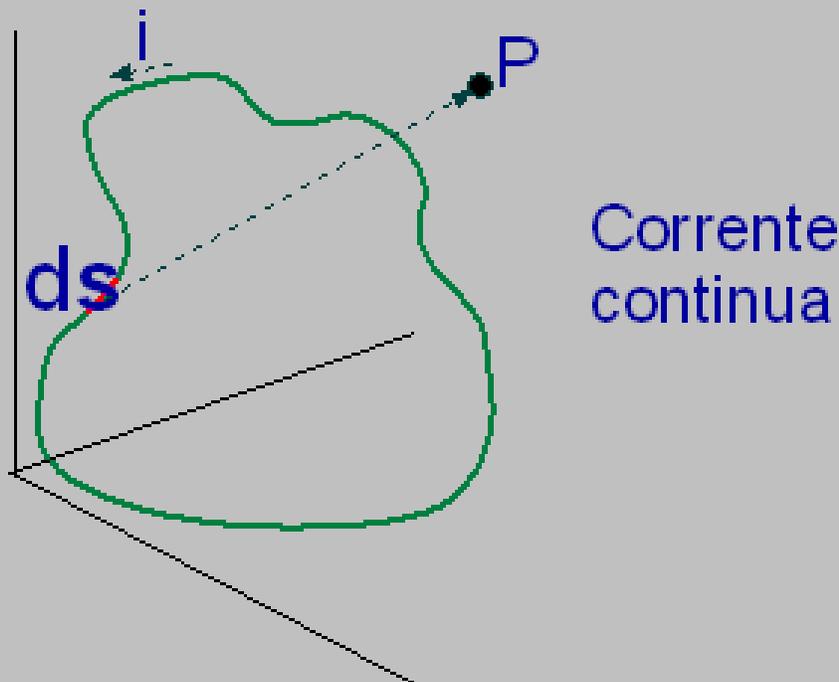
Campo di un filo percorso da corrente



$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$\rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{i d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

## Campo di un circuito chiuso



In ogni punto dello spazio, somma di tutti gli elementi di corrente:

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_{\text{circuito}} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

C. magnetico generato da una singola carica in moto:

Si puo' partire dalla I legge elementare di Laplace

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\text{circuito}} \frac{d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$\rightarrow d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$ids = jA ds = \mathbf{j} dV$$

$$\rightarrow d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV$$

$\mathbf{j} = qn\mathbf{v}$  dens. di corrente

$$\rightarrow d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} ndV$$

Per una singola carica:

$$\rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Relazione fra c. elettrico e c. magnetico per una carica puntiforme in movimento:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$\rightarrow \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{v} \times \mathbf{E}$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \equiv \frac{1}{c^2}, \quad c \text{ vel. della luce nel vuoto}$$

$$\rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}$$

rel. valide quando  $v \ll c$

C. elettrico e c. magnetico di una carica puntiforme:

Dipendono dal sistema di riferimento ( $\mathbf{v} \dots$ )

Relativita' ristretta:

C. magnetico = Effetto relativistico

Possibile ricavarlo da c. elettrico tramite trasformazione di Lorentz

$\rightarrow$  Possibile ricavare I legge di Laplace da

C. coulombiano + Trasn. di Lorentz

Percorso inverso al precedente:

Si puo' partire dal campo di una singola carica in movimento

## Relazione fra campo generato da una carica in moto e la legge elementare di Laplace

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\mathbf{v}_1 \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad \text{Campo di una carica puntiforme}$$

Se considero  $N$  cariche, tutte con la stessa velocità:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Nq \frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Campo generato da  $dN$  cariche, tutte con la stessa velocità:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} dNq \frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} ndVq \frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$\rightarrow d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\overbrace{qn\mathbf{v}}^{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{r}} dV}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV$$

Per un filo percorso da corrente,

campo generato da tutte le cariche in moto nel filo:

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \int_{\text{tutto il filo}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV$$

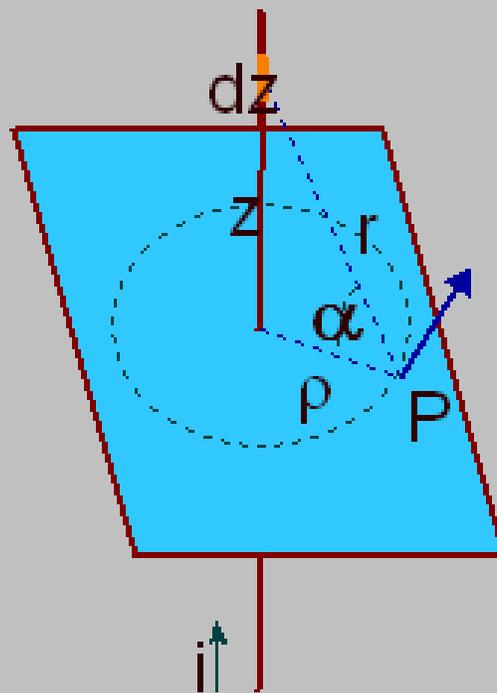
$$dV = d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{j} dV = \mathbf{j} (d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s})$$

$$\int_{\text{Sez. del filo}} \mathbf{j} (d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}) = \int_A \mathbf{j} dA ds = i ds$$

$$\rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\text{tutto il filo}} \frac{d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$\rightarrow d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad \text{campo di un elemento di filo}$$

## Applicazione: filo indefinito



$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{i d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

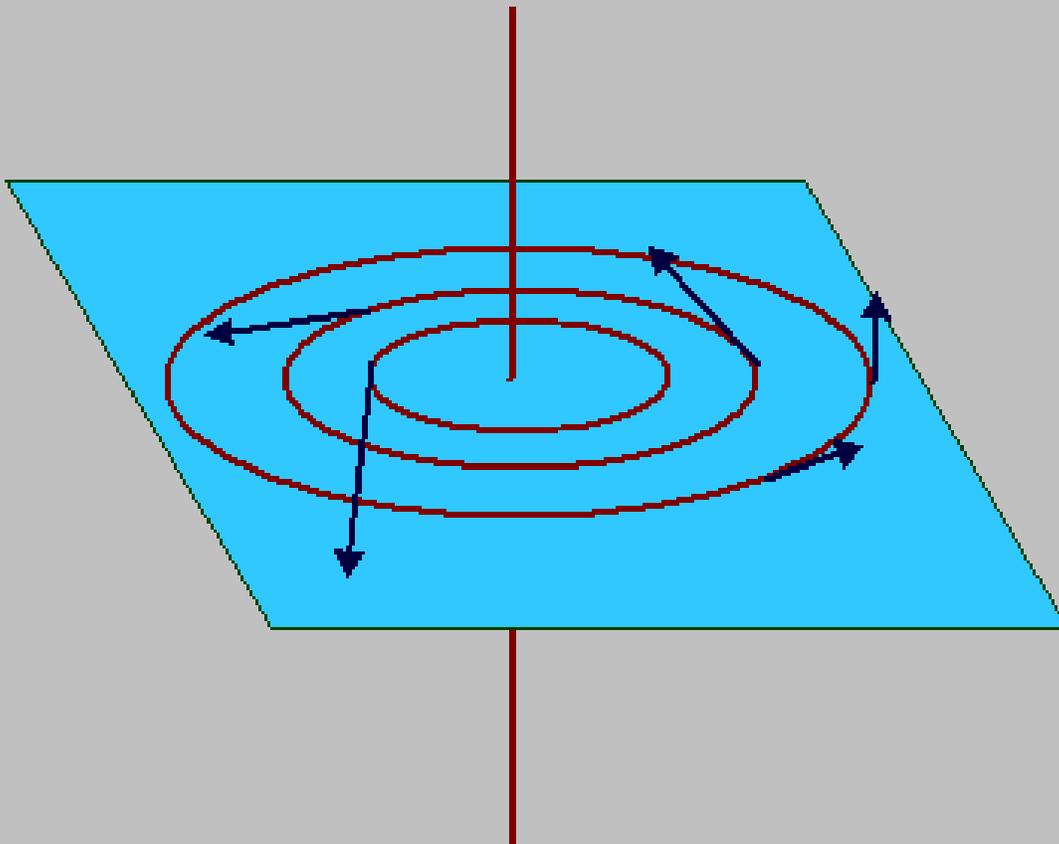
$$|d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}| = dz \sin \vartheta = dz \cos \alpha$$

$$r^2 = \rho^2 + z^2, z = \rho \tan \alpha$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r^2 = \rho^2 (1 + \tan^2 \alpha) = \frac{\rho^2}{\cos^2 \alpha} \\ dz = \frac{\rho}{\cos^2 \alpha} d\alpha \end{array} \right\} \rightarrow \frac{dz}{r^2} = \frac{d\alpha}{\rho}$$

$$\rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\rho} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{\rho} \sin \alpha \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{\rho} \cdot 2$$

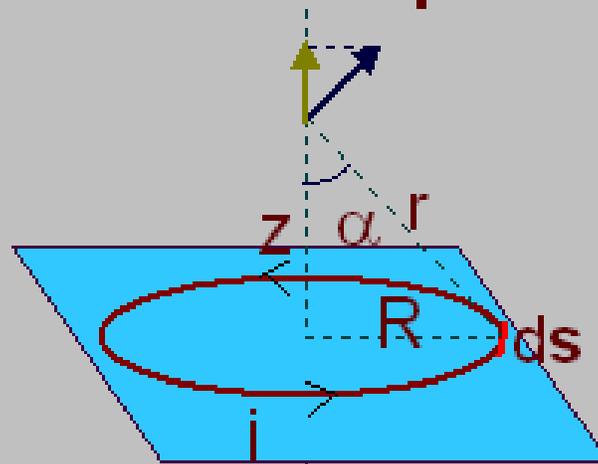
## Linee di campo di un filo



Cerchi concentrici all'asse del  
filo: campo sempre tangente al  
cerchio

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r}$$

## Applicazione: campo sull'asse di una spira circolare



$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Componente perp. all'asse di ogni contributo: compensata da contributo diametralmente opposto

$$dB_{\parallel} = dB \sin \alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R d\theta}{r^2} \sin \alpha$$

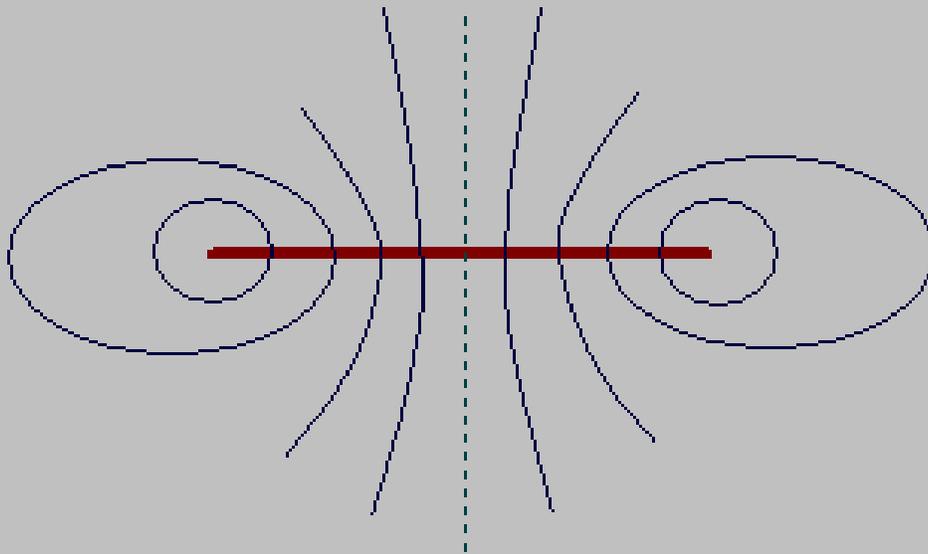
$$r^2 = R^2 + z^2$$

$$\sin \alpha = \frac{R}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$\rightarrow dB_{\parallel} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R^2 d\theta}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \rightarrow B_{\parallel} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R^2 d\theta}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

## Linee di campo per la spira circolare

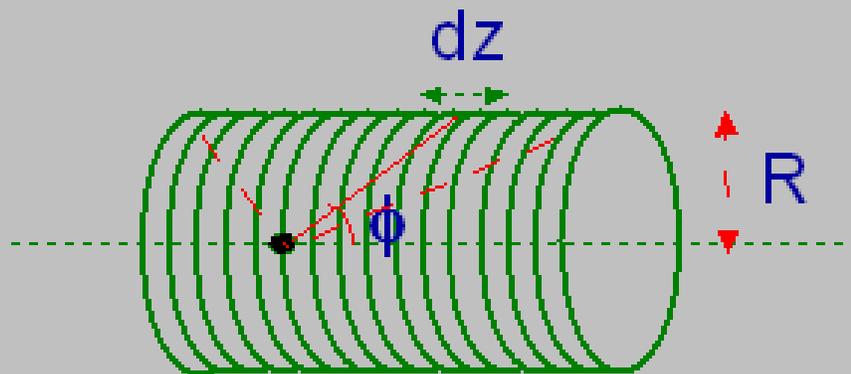


Tutte le linee sono chiuse

L'andamento generale e' lo stesso delle linee di campo di un dipolo elettrico (a grande  $r$ )

Spira circolare: prototipo di *dipolo magnetico*

# Applicazione: campo sull'asse di un solenoide - 1



Bobina: successione di spire identiche, l'una in serie all'altra

Densita' di spire:  $n$  per metro

per una spira:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

per il contributo delle spire contenute in  $dz$ :

$$dB = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} ndz$$

campo totale al centro:

$$B = \int_{-L}^{+L} \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} ndz = \frac{\mu_0 i n R^2}{2} \int_{-L}^{+L} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

## Applicazione: campo sull'asse di un solenoide - 2

Sommando tutti i contributi:

$$B = \frac{\mu_0}{2} inR^2 \int_{-L}^{+L} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$z \tan \varphi = R \rightarrow dz = R \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0}{2} inR^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} R \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \frac{1}{R^3 (1 + \cot^2 \varphi)^{3/2}}$$

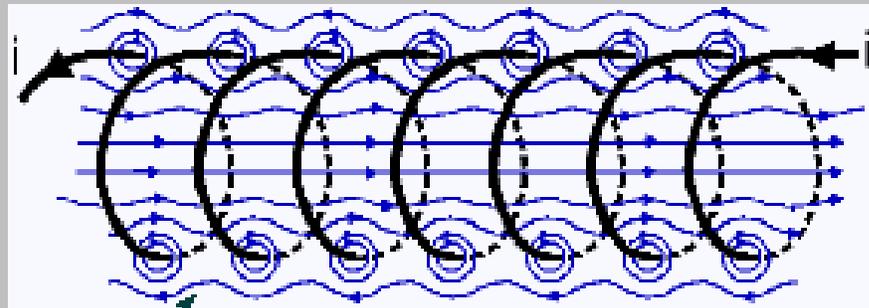
$$= \frac{\mu_0}{2} in \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi = \frac{\mu_0}{2} in (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)$$

Se  $\varphi_1, \varphi_2$  tendono a  $\pi, 0$ , si ha:

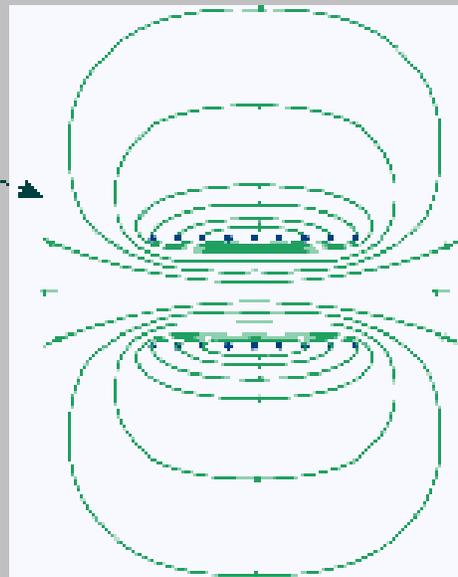
$$B = \mu_0 ni$$

campo uniforme lungo l'asse

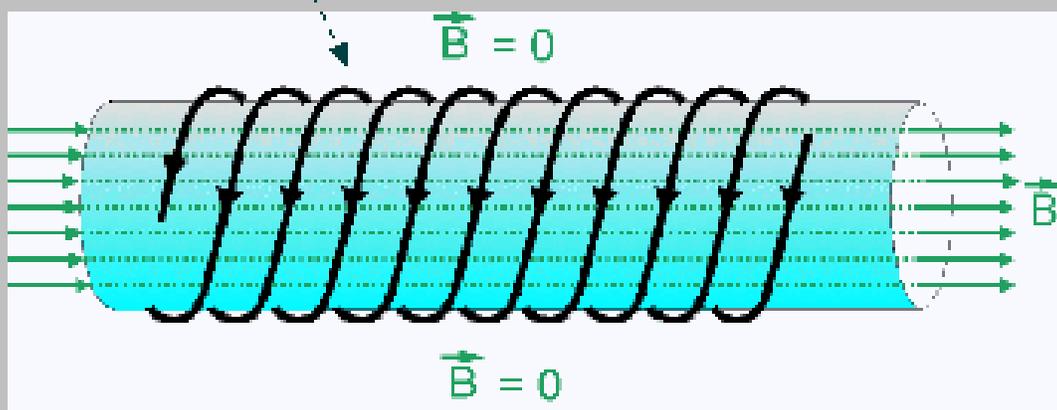
## Campo di un solenoide



Solenoide finito

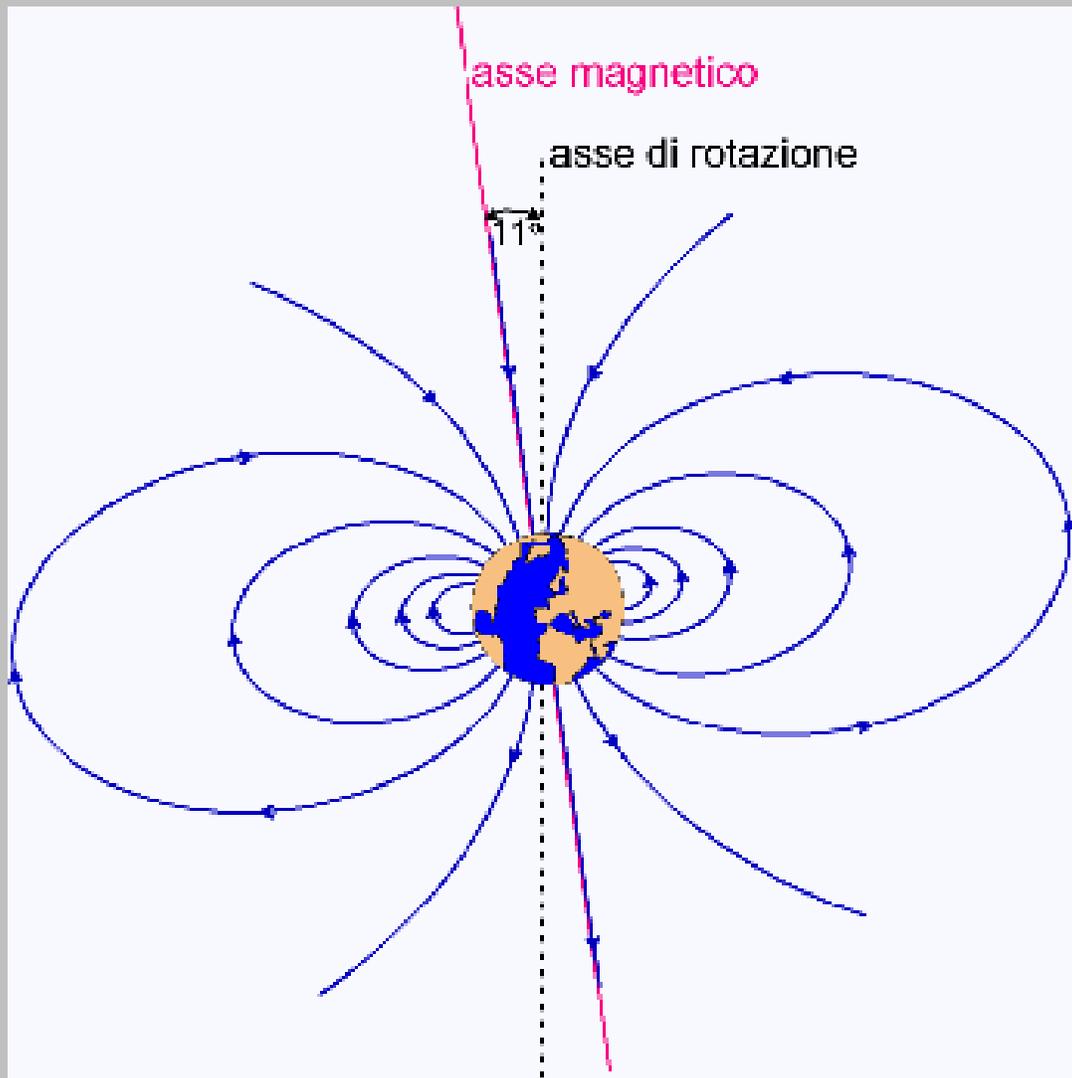


Solenoide infinito



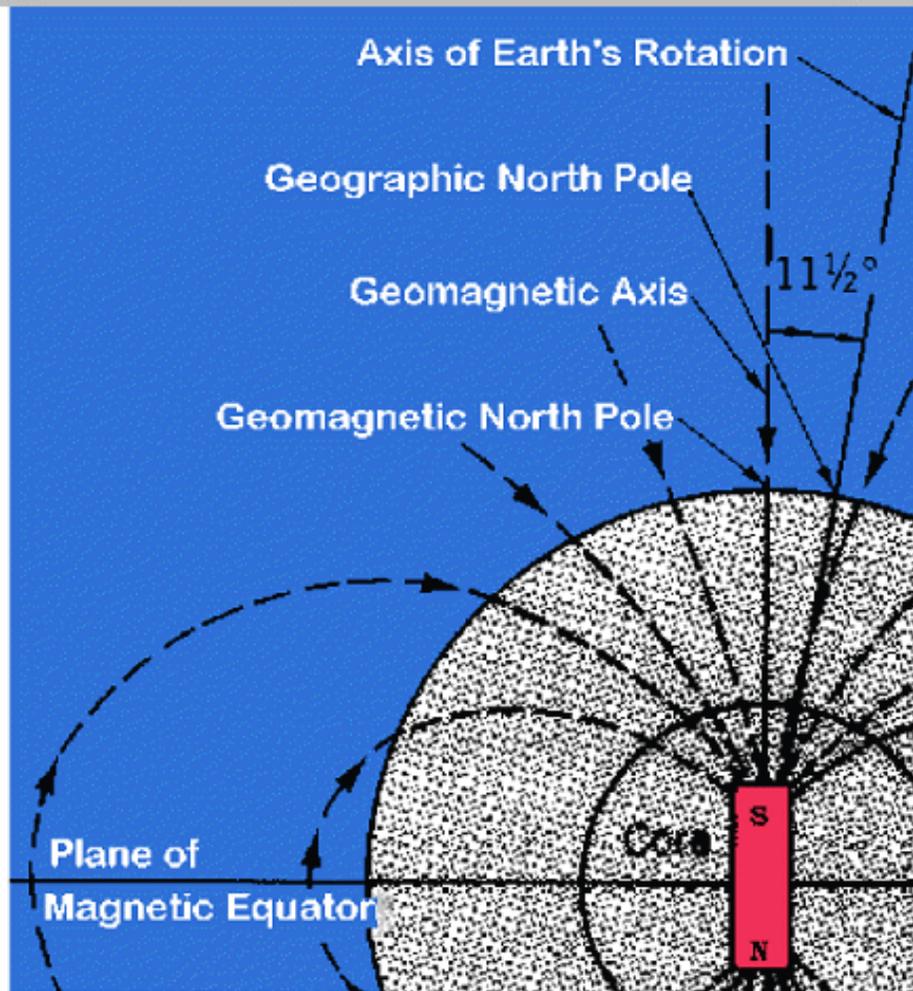
(da V.Gracco - Fisica generale II)

# Campo magnetico terrestre



Asse magnetico disallineato rispetto ad asse di rotazione

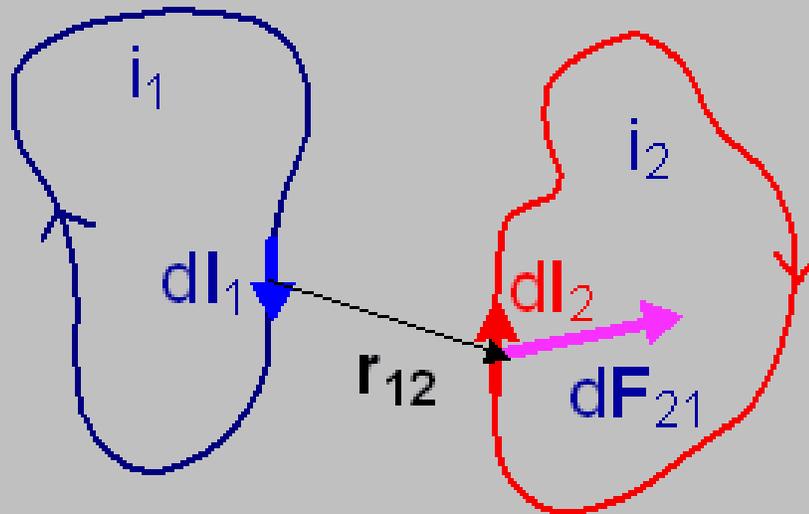
# Campo geomagnetico



Campo di un dipolo magnetico: già visto caso particolare per i punti sull'asse di una spira circolare

Caso generale: v. nota su Potenziali e Campi di Dipolo

## Forza fra circuiti - 1



Forza esercitata su  $d\mathbf{l}_2$  dal circuito 1

$$d\mathbf{F}_{21} = i_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{circ.1}} \frac{i_1 d\mathbf{l}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_{12}}{r_{12}^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{circ.1}} \frac{i_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

Campo generato dall'intero 1 nel punto in cui sta  $d\mathbf{l}_2$

## Forza fra circuiti - 2

Se i circuiti sono rigidi:

$$\mathbf{F}_{21} = \oint_{\text{circ.2}} i_2 d\mathbf{l}_2 \times \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{circ.1}} \frac{i_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \oint_{\text{circ.2}} d\mathbf{l}_2 \times \oint_{\text{circ.1}} \frac{d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \oint_{\text{circ.2}} \oint_{\text{circ.1}} \frac{d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  identità vettoriale

$$\rightarrow d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}) = d\mathbf{l}_1 (d\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r}_{12}) - \mathbf{r}_{12} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)$$

Quindi:

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_1 (d\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r}_{12}) - \mathbf{r}_{12} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)}{r_{12}^3}$$

=0 quando integrato

$$\rightarrow \mathbf{F}_{21} = -\frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \oint_1 \oint_2 \frac{\mathbf{r}_{12} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)}{r_{12}^3}$$

fattore puramente geometrico

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$$

→ conforme a III principio della dinamica

Es: Coppia di fili ortogonali

$$d\mathbf{l}_1 \perp d\mathbf{l}_2 \rightarrow d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = 0 \rightarrow \mathbf{F}_{21} = 0$$

Es: Coppia di fili paralleli a distanza  $r$

$$\text{Correnti concordi} \rightarrow d\mathbf{l}_1 \parallel d\mathbf{l}_2 \rightarrow d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = dl_1 dl_2$$

→  $\mathbf{F}_{21} \parallel \mathbf{r}_{12}$  attrattiva

$$\text{Correnti discordi} \rightarrow d\mathbf{l}_1 \text{ anti} \parallel d\mathbf{l}_2 \rightarrow d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = -dl_1 dl_2$$

→  $\mathbf{F}_{21} \parallel -\mathbf{r}_{12}$  repulsiva

Modulo, per fili di lunghezza  $d$ :

$$|\mathbf{F}_{12}| = |\mathbf{F}_{21}| = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r} d$$

→ Forza per unita' di lunghezza:

$$F = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r}$$