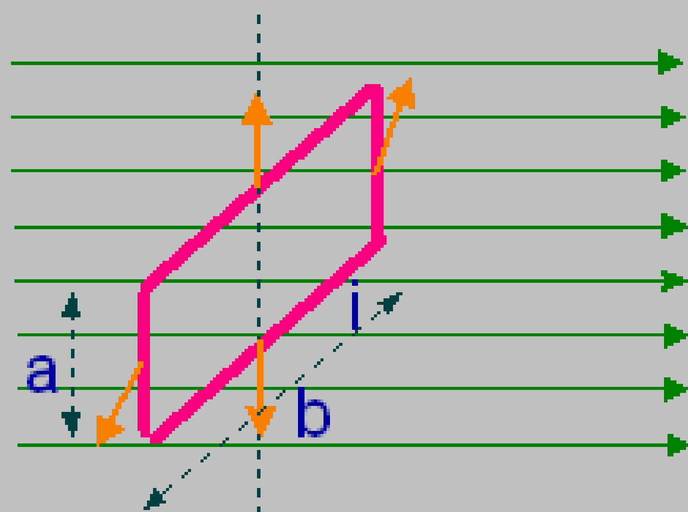
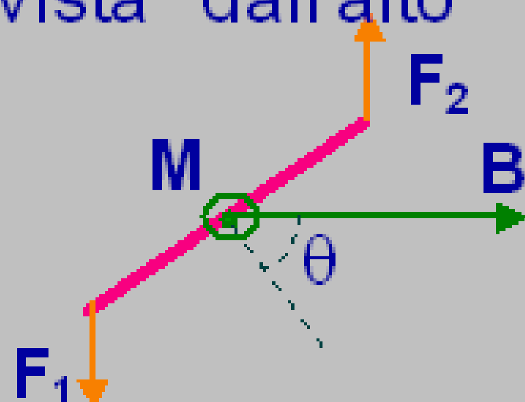
Dipolo magnetico

Spira rettangolare immersa in campo esterno uniforme:

vista "prospettica"



vista "dall'alto"



$$\mathbf{F}_{tot} = 0 \text{ sui lati lunghi}$$

$$\left|\mathbf{F}\right| = iaB \quad \text{sui lati corti}$$

Momento meccanico

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}_1 \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \times \mathbf{r}_2 = \mathbf{F} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

$$\rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{F} \times \mathbf{b} \rightarrow |\mathbf{M}| = iaBb\sin\theta$$

$$\rightarrow M = iAB\sin\theta$$

Momento di dipolo magnetico:

$$\mathbf{m} = iA\mathbf{u}_n, \quad \mathbf{u}_n \text{ versore normale alla spira}$$

Allora:

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

$$\text{posizione di equilibrio} : \mathbf{m} \parallel \mathbf{B}$$

Energia potenziale magnetica: analogia al caso del dipolo elettrico

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

Legge di Gauss per il campo magnetico

Assenza di cariche magnetiche:

$$\oiint_{\text{sup.chiusa}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}A = 0$$

Teorema della divergenza:

$$\oiint_{\text{sup.chiusa}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}A = 0 = \iiint_{\text{volume}} (\nabla \cdot \boldsymbol{B}) dV$$

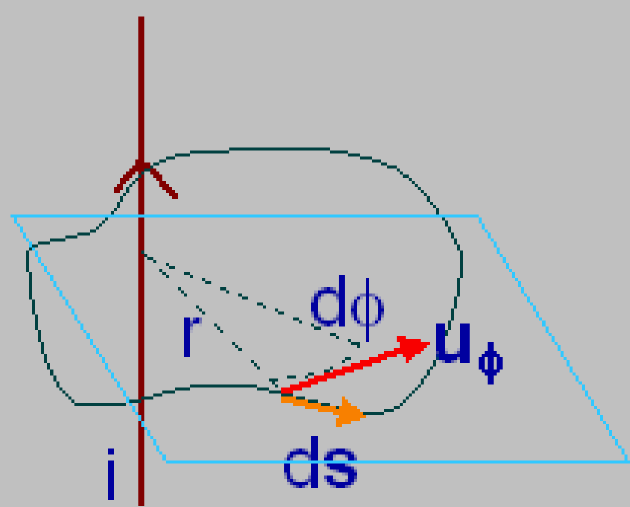
$$\rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

Analoga alla legge di Gauss per il campo elettrico

Teorema di Ampere - 1

Filo indefinito:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\mathbf{u}}_\varphi \longrightarrow \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\mathbf{u}}_\varphi \cdot d\mathbf{s}$$



$\mathbf{u}_\phi$: versore tangenziale

$\hat{\mathbf{u}}_\varphi \cdot d\mathbf{s}$: proiezione di $d\mathbf{s}$ lungo $\hat{\mathbf{u}}_\varphi$

$$\longrightarrow \hat{\mathbf{u}}_\varphi \cdot d\mathbf{s} = r d\varphi$$

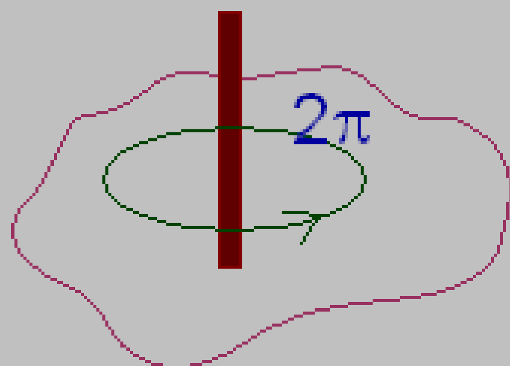
Allora:

$$\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_o i}{2\pi} d\varphi \longrightarrow \oint_{curva} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_o i}{2\pi}\oint_{curva} d\varphi$$

Teorema di Ampere - 2

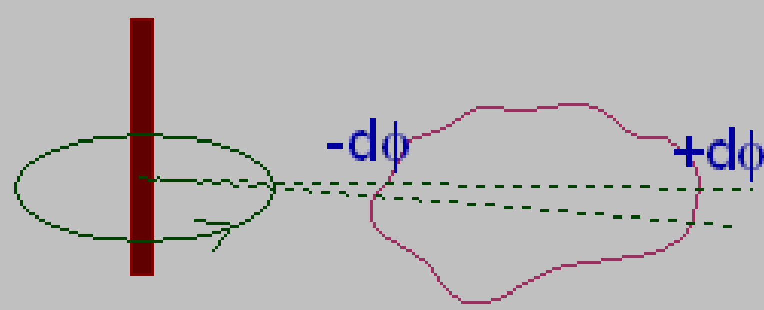
Due possibilita':

1) la curva include il filo



$$\rightarrow \oint_{curva} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_o i}{2\pi} \oint_{curva} d\varphi = \frac{\mu_o i}{2\pi} 2\pi = \mu_o i$$

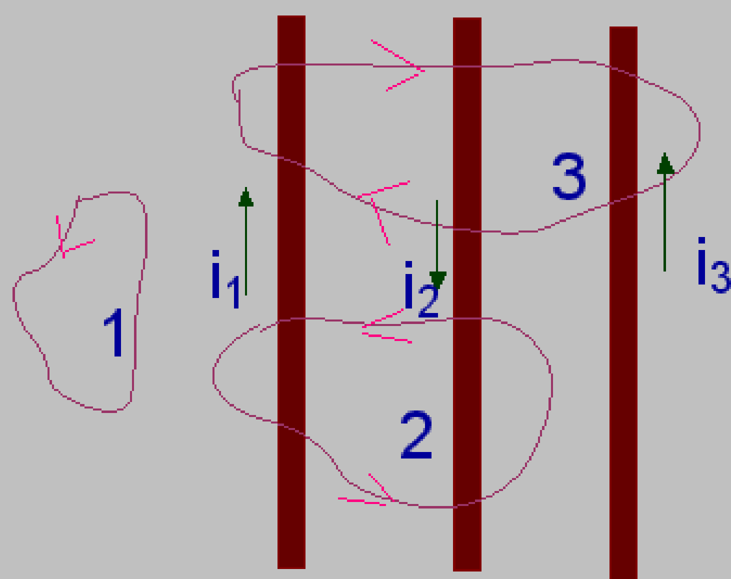
2) la curva non include il filo



$$\rightarrow \oint_{curva} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_o i}{2\pi} \oint_{curva} d\varphi = \frac{\mu_o i}{2\pi} \cdot 0 = 0$$

Teorema di Ampere - 3

Con distribuzione generica di correnti:



$$\oint_{\text{curva}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 \sum_k i_k$$

Quindi:

$$\rightarrow \oint_1 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

$$\rightarrow \oint_2 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \left(i_1 - i_2 \right)$$

$$\rightarrow \oint_3 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \left(-i_1 + i_2 - i_3 \right)$$

Applicazioni - 1

Filo rettilineo indefinito

fuori dal filo:
linea amperiana=cerchio concentrico

$$\rightarrow \oint_{raggio\ r} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B = \mu_0 i$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

dentro al filo:
stessa geometria

$$\rightarrow \oint_{raggio\ r} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B = \mu_0 I(r)$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r}$$

$$i = j\pi R^2 \rightarrow j = \frac{i}{\pi R^2} \rightarrow I(r) = j\pi r^2 = i\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi r} i \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2}$$

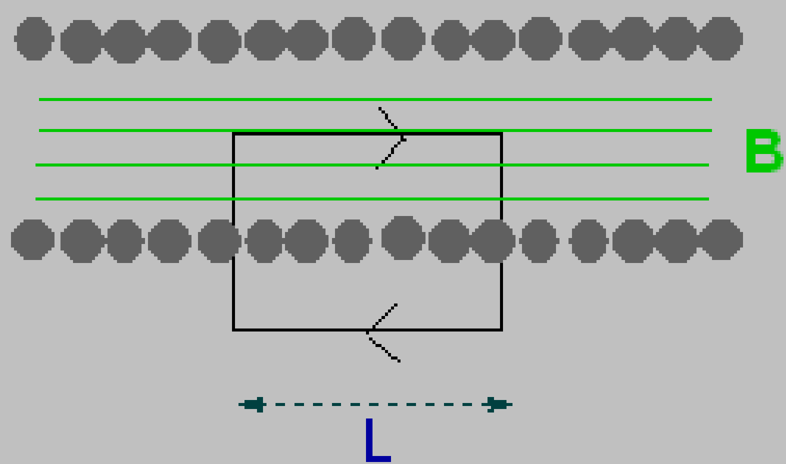
Applicazioni - 2

Solenoide indefinito, n spire/m

Campo parallelo all'asse sui punti dell'asse

Anche per punti fuori dall'asse (si puo' vedere con un argomento sul flusso di **B**)

Fuori del solenoide campo nullo

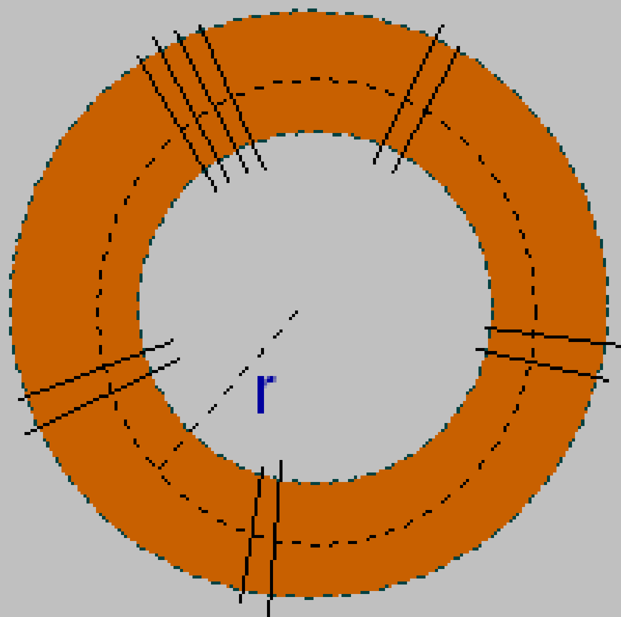


$$\rightarrow \oint_{raggio\ r} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = BL = \mu_0 nLi$$

$$\rightarrow B = \mu_0 ni$$

Applicazioni - 3

Solenoide toroidale:
N spire in tutto

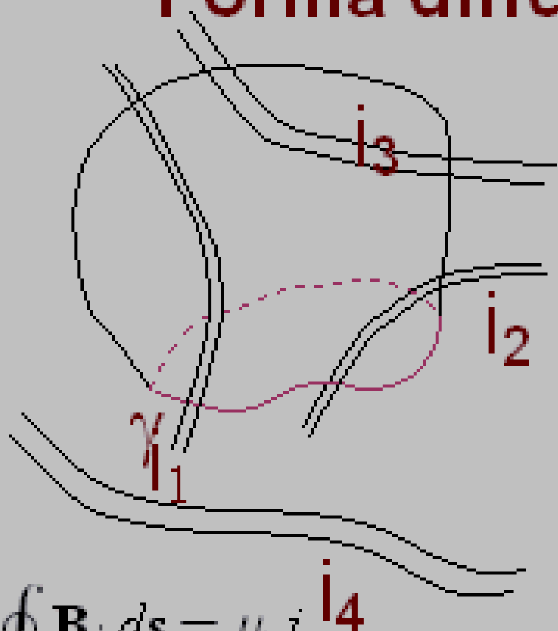


Linea amperiana: cerchio concentrico

$$\rightarrow \oint_{raggio\ r} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B\, 2\pi r = \mu_0 i N$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}$$

Teorema di Ampere
Forma differenziale



$$\oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i$$

$i =$ **corrente totale concatenata a** γ

$$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_n$$

$i_k = \mathbf{j}_k \cdot \Delta \mathbf{S}_k$ **sezione trasversale**

$$\rightarrow \sum_{k=1}^{n} \mathbf{j}_k \cdot \Delta \mathbf{S}_k = \oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}$$

Teorema del rotore:

$$\oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oiint_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A}$$

$$\rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

Seconda coppia di equazioni di Maxwell:

Forma integrale:

$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$ Legge di Gauss per il campo magnetico

$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i$ Legge di Ampere (incompleta: valida per campi statici)

Forma differenziale:

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$

$\rightarrow$ *Non* esistono cariche magnetiche

$\rightarrow$ **B** campo *solenoidale*