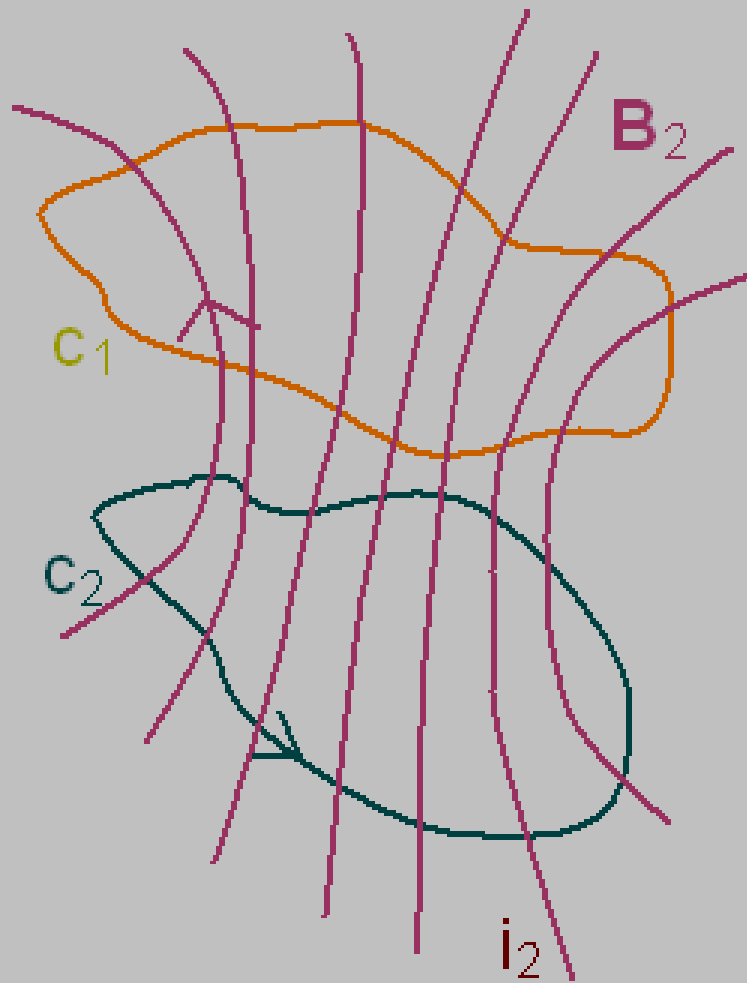


Induttanza-1

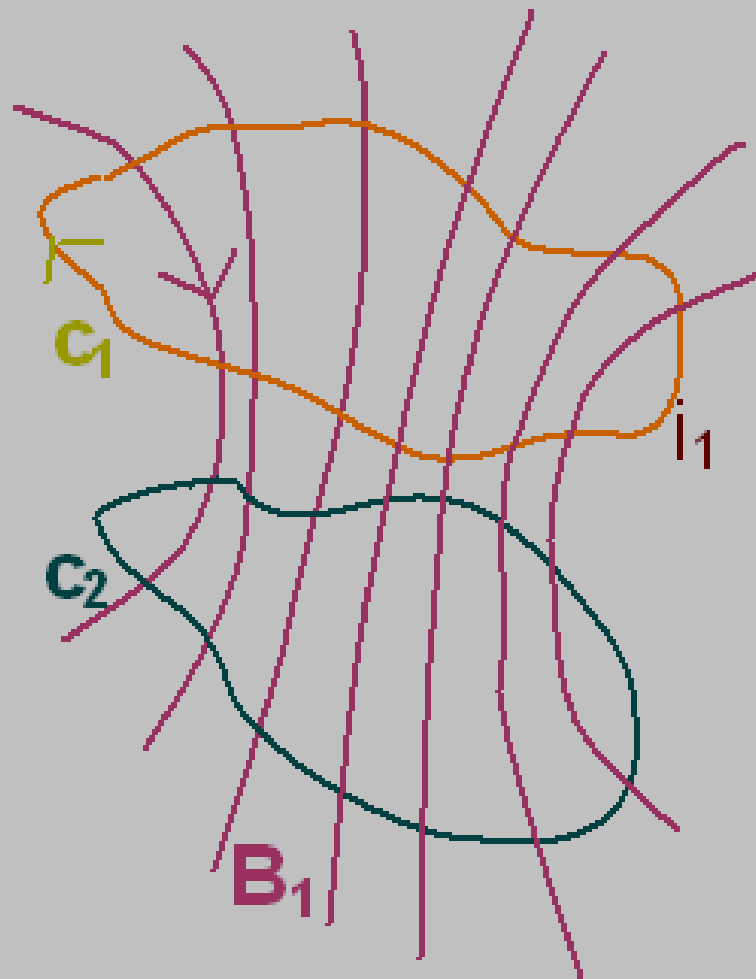


Corrente in 2 concatena flusso in 1

$$i_2 \rightarrow B_2 \rightarrow \Phi_{c1}(B_2) = L_{12}i_2$$

L_{12} coefficiente di mutua induzione

Induttanza-2

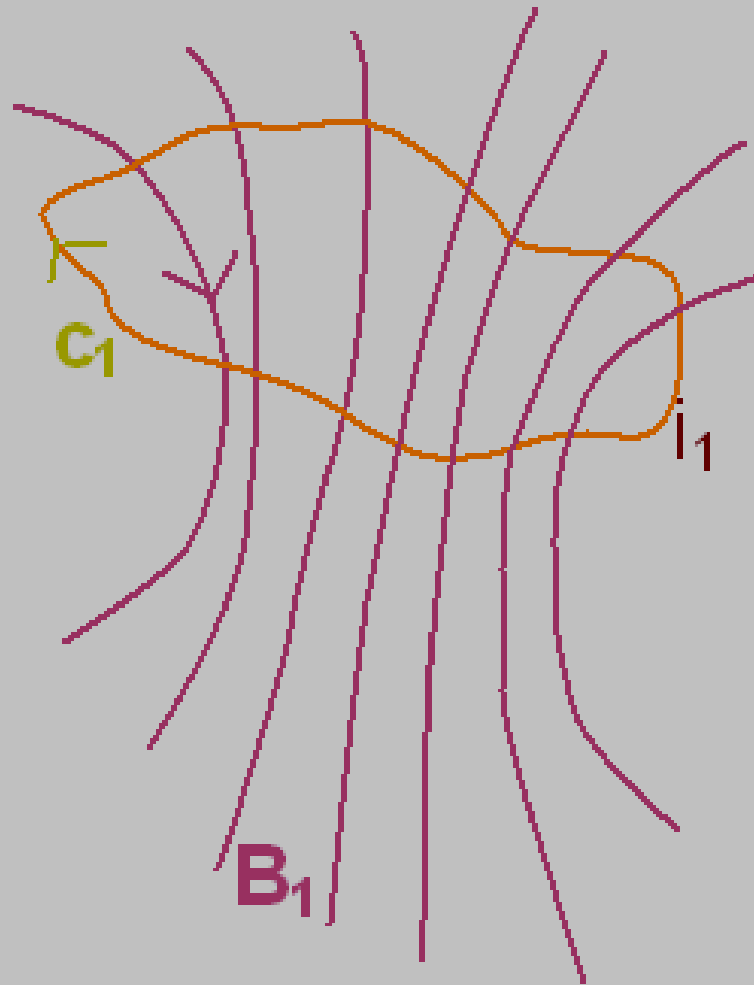


Corrente in 1 concatena flusso in 2

$$i_1 \rightarrow B_1 \rightarrow \Phi_{C2}(B_1) = L_{21}i_1$$

L_{21} coefficiente di mutua induzione

Induttanza-3



Corrente in 1 concatena flusso in 1

$$\Phi_{c_1}(B_1) = Li_1$$

L coefficiente di auto induzione

Significato dell'induttanza

Per un insieme di circuiti percorsi da corrente:

Situazione analoga a quella di un insieme di conduttori carichi

Matrice delle capacit :

descrive l'*accoppiamento elettrostatico* fra i conduttori (incluso l'auto-accoppiamento)

Matrice delle induttanze:

descrive l'*accoppiamento magnetico* fra i circuiti (incluso l'auto-accoppiamento)

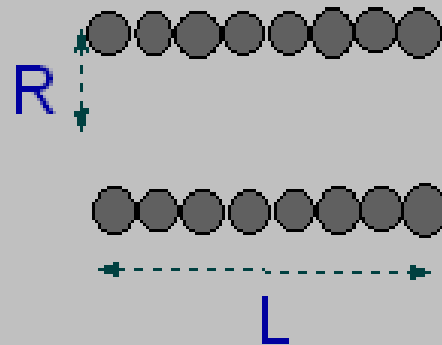
Auto-capacit : rapporto fra carica e potenziale

Capacit  mutua: misura dell'effetto dell'induzione elettrostatica fra due conduttori

Auto-induttanza: rapporto fra flusso e corrente

Induttanza mutua: misura dell'effetto dell'induzione elettromagnetica fra due circuiti

Esempio di calcolo di induttanza Solenioide rettilineo



n spire/metro

Usiamo la relazione:

$$\Phi(\mathbf{B}) = Li$$

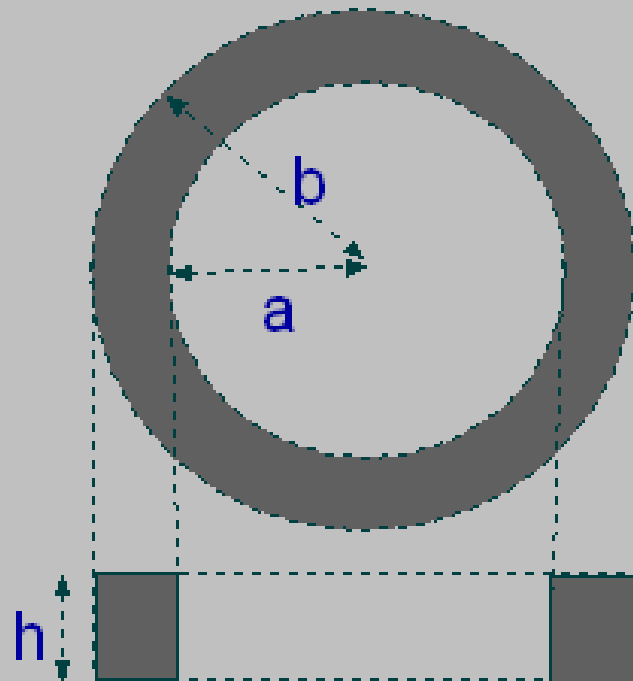
Allora:

$$B = \mu_0 in = \mu_0 i \frac{N}{l}$$

$$\Phi(\mathbf{B}) = \pi R^2 N \mu_0 i \frac{N}{l} = \pi R^2 \mu_0 \frac{N^2}{l} i$$

$$\rightarrow L = \pi R^2 \mu_0 \frac{N^2}{l}$$

Esempio di calcolo di induttanza Solenoidi toroidale



$$B = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r}$$

$$d\Phi = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} N dA = \frac{\mu_0 N^2 i}{2\pi r} h dr$$

$$\rightarrow \Phi(\mathbf{B}) = \int_a^b \frac{\mu_0 N^2 i}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 N^2 i}{2\pi} h \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$\rightarrow \Phi(\mathbf{B}) = \frac{\mu_0 N^2 i}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}$$

$$\rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}$$

Es.: Mutua induttanza di due solenoidi,
della stessa lunghezza e uno (1) interno all'altro (2)
Flusso attraverso una spira del solenoide esterno (2)

$$\Phi_{21} = BA_1 = \mu_0 \frac{N_1 i_1}{l} A_1$$

$$\rightarrow M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} A_1$$

Simile per solenoide interno:

$$\Phi_{12} = B_2 A_1 = \mu_0 \frac{N_2 i_2}{l} A_1$$

$$\rightarrow M_{12} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{i_2} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} A_1 = M_{21}$$

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 A_1}{l}, L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 A_2}{l}$$

$$\rightarrow M_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} A_1 = \sqrt{L_1 L_2} \frac{A_1}{\sqrt{A_1 A_2}} = \sqrt{L_1 L_2} \sqrt{\frac{A_1}{A_2}}$$

$$\rightarrow M_{12} = M_{21} = \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} \sqrt{L_1 L_2} < \sqrt{L_1 L_2}$$

Confronto proprietà \mathbf{E} e \mathbf{B}

Campo irrotazionale: \mathbf{E} (*statico*)

Rotore = 0 \rightarrow assenza di vortici \rightarrow *campo di sorgenti*

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Integrale di linea su percorso chiuso = 0; esiste funzione potenziale

Integrale di superficie su sup. chiusa = carica totale contenuta

Sorgente elementare: carica puntiforme

Campo solenoidale: \mathbf{B}

Divergenza = 0 \rightarrow assenza di sorgenti/pozzi \rightarrow *campo di vortici*

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Integrale di linea su percorso chiuso = vortice concatenato

Integrale di superficie su sup. chiusa = 0

Vortice elementare: corrente filamentare

Potenziale vettore

Analogia (parziale) con campo elettrostatico:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V \quad V \text{ funzione scalare}$$

Infatti:

$$\nabla \times (\nabla V) \equiv 0, \quad \text{da:}$$

definizione di ∇ + uguaglianza delle derivate seconde miste

Per il campo magnetostatico:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \neq 0 \rightarrow \text{non esiste } W \text{ t.c. } \mathbf{B} = -\nabla W$$

Tuttavia, $\nabla \cdot \mathbf{B} \equiv 0 \rightarrow$ Si puo' sempre scrivere

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \text{ campo vettoriale}$$

Infatti:

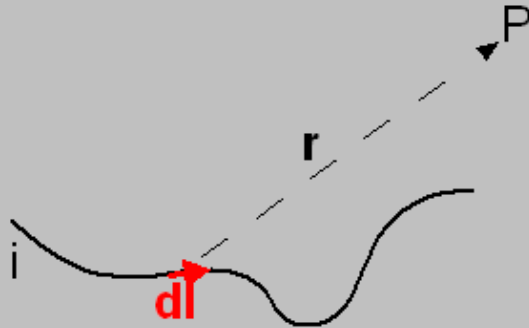
$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0, \quad \text{per } \mathbf{A} \text{ qualsiasi, da:}$$

definizione di ∇ + uguaglianza delle derivate seconde miste

**\mathbf{A} = potenziale vettore di \mathbf{B} ,
analogo a V per \mathbf{E}**

Potenziale vettore e densita' di corrente

Legame fra \mathbf{A} e correnti: analogo a quello fra V e cariche



Pot. vettore elementare (= quello di un elemento di volume):

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j}dV}{r}, r \text{ distanza fra el. di volume e punto P}$$

Per correnti in conduttori filiformi:

$$\mathbf{j}dV = \rho\mathbf{v}dV$$

$$\rightarrow \mathbf{j}dV = \rho\mathbf{v}dV$$

$$\rightarrow \mathbf{j}dV = dq\mathbf{v} = dq \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{dq}{dt} d\mathbf{l} = i d\mathbf{l}$$

$$\rightarrow d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j}dV}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\mathbf{l}}{r}$$

Quindi:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{circuito}} \frac{i}{r} d\mathbf{l}$$

Pot. vettore: definito a meno del gradiente di una funzione scalare qualsiasi

Infatti:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi(x, y, z)$$

$$\rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla \chi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

[Situazione analoga a quella di V per il campo \mathbf{E} :

Definito a meno di una costante arbitraria]

$\rightarrow \mathbf{A}$ e \mathbf{A}' definiscono lo stesso campo \mathbf{B} :

$$\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}' = \mathbf{B}$$

Indeterminatezza di \mathbf{A} sfruttabile per imporre un'altra condizione:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \chi$$

Scegliendo χ tale che

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \chi = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{A}' = 0, \quad \mathbf{A}' \text{ solenoidale}$$

Con questa scelta, appropriata per campi statici:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j}$$

Teo. dell'analisi vettoriale:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \equiv -\nabla^2 \mathbf{A} \quad \text{con la condizione aggiuntiva su } \mathbf{A}$$

$$\rightarrow \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad 3 \text{ eq. di Poisson per le componenti cartesiane di } \mathbf{A}$$

Stessa equazione \rightarrow Stessa soluzione

Sol. generale: come per il pot. elettrostatico

$$A_i \left(\underbrace{x, y, z}_r \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{Vol} \frac{j_i \left(\overbrace{x', y', z'}^{r'} \right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

che e' all'origine dell'espressione data sopra per $d\mathbf{A}$

Proprieta' di \mathbf{A} :

Per circuiti filamentari percorsi da corrente:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{j} dV}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{i \hat{\mathbf{u}}_r S ds}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{i ds}{r} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_C \frac{ds}{r}, \quad C \text{ curva che descrive il circuito}$$

C curva (chiusa) che delimita superficie S (aperta)

Rel. fra flusso di \mathbf{B} e circuitazione di \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \rightarrow \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot ds$$

Esempio

Solenoid indefinito, raggio R , corrente i

$d\mathbf{A} \parallel ds \rightarrow \mathbf{A} \equiv (A_r, A_\theta, A_z)$ comp. cilindriche = $(0, A, 0)$

$\oint_C \mathbf{A} \cdot ds = 2\pi r A = \pi r^2 B$, C circonferenza concentrica di raggio $r < R$

$$\rightarrow A = \frac{1}{2} B r = \frac{1}{2} \mu_0 n i r$$

$\oint_C \mathbf{A} \cdot ds = 2\pi r A = \pi R^2 B$, C circonferenza concentrica di raggio $r > R$

$$\rightarrow A = \frac{1}{2} B \frac{R^2}{r} = \frac{1}{2} \mu_0 n i \frac{R^2}{r}$$

Filo indefinito

$\mathbf{j} = j \hat{\mathbf{u}}_z \rightarrow \mathbf{A} \parallel \hat{\mathbf{u}}_z \rightarrow A_x = A_y = 0 \rightarrow \mathbf{A} = (0, 0, A)$ comp. cartesiane

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot ds = \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

C sup. rettangolare complanare al filo, $r_1 < r < r_2, z_1 < z < z_2$

$$\rightarrow \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} dr \Delta z, \oint_C \mathbf{A} \cdot ds = A(r_1) \Delta z - A(r_2) \Delta z = [A(r_1) - A(r_2)] \Delta z$$

$$\rightarrow [A(r_1) - A(r_2)] \Delta z = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} dr \Delta z = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \Delta z \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$\rightarrow A(r_1) - A(r_2) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \text{Diff. fra pot. vettore a } r_1, r_2 \quad \text{OK}$$

Pot. vettore in un punto $\rightarrow \infty$ perche' il filo e' infinito