Induzione elettromagnetica:
Insieme apparentemente eterogeneo di fenomeni diversi
Tutti riconducibili a un'unica legge fisica: Legge di Faraday
Origine in una proprieta' fondamentale del campo elettromagnetico:

Un campo magnetico variabile nel tempo
e' sempre accompagnato da un campo elettrico

Fenomenologia diversa:

Moto di conduttori in un c. magnetico costante-> fem (mozionale)
Moto di circuiti in un c. magnetico costante e uniforme-> fem = 0
Moto di circuiti in un c. magnetico costante e non uniforme-> fem

Spiegazione:
Forza di Lorentz -> Azione su cariche in movimento -> fem
-> Separazione cariche -> C. elettrostatico
Spiegazione equivalente:
Regola del flusso (tagliato)

Circuiti fermi in un c. magnetico variabile -> fem
Spiegazione:
C.elettrico non conservativo->fem
Spiegazione equivalente:
Regola del flusso (concatenato)

Forza elettromotrice indotta

Situazione nuova:

campi variabili nel tempo

Fatti sperimentali:

moto di un conduttore in un campo magnetico ➡ f.e.m. indotta

moto di un circuito in un campo non uniforme ➡ corrente nel circuito

Origine: f.e.m. mozionali

circuito in un campo esterno variabile nel tempo ➡ corrente nel circuito

Origine:??

Forza elettromotrice mozionale

Moto di conduttori in un campo magnetico esterno

Effetto della forza di Lorentz sui portatori liberi

- Separazione delle cariche
- Campo elettrico all'equilibrio

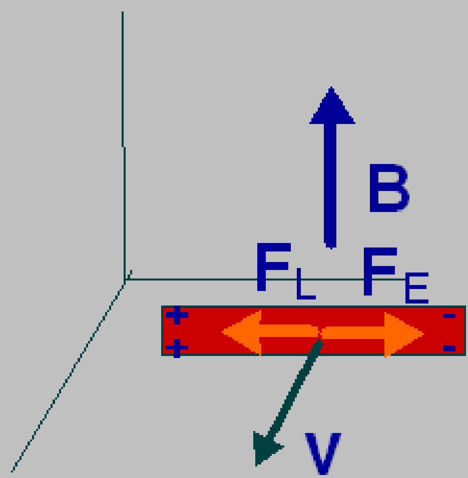
Integrale di linea di E:
Talvolta chiamato f.e.m. mozionale

Situazione simile *nei suoi effetti* a quella originata da una batteria

Non sempre si hanno effetti di corrente indotta (solo in circuiti chiusi), mentre si ha sempre un campo elettrico

Tipi di f.e.m. indotte - 1

f.e.m. mozionale



Sbarra conduttrice in moto in campo esterno: su cariche libere

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

$\longrightarrow$ accumulo di cariche opposte agli estremi della sbarra

$\longrightarrow$ campo elettrico interno

$\longrightarrow$ forza elettrica (equilibrio)

Quindi:

$$\mathcal{E} = \int (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{s} = \int (d\mathbf{s}\times\mathbf{v})\mathbf{B}$$

$$\mathcal{E} = \int \left(d\mathbf{s}\times\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right)\mathbf{B} = -\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$$

F.di Lorentz su cariche libere:
Equivalente a c. elettrico indotto nella sbarretta, che spinge le cariche agli estremi (v.disegno), *contro* l' azione del c.elettrostatico che si viene a formare per separazione delle cariche

$$\mathbf{F}_L = -q\mathbf{E}_i$$

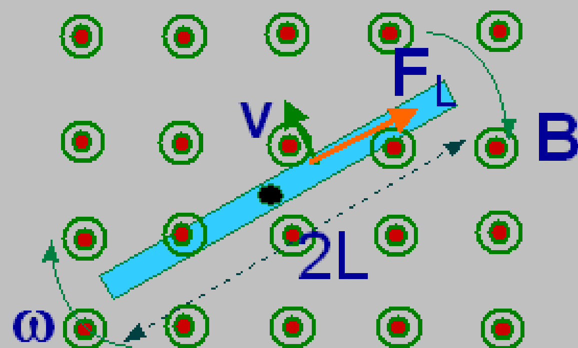
Complessivamente, nella sbarretta all'equilibrio (ossia, quando e' in movimento con velocita' costante) ci sono due campi:

quello indotto, che e' diretto come $\mathbf{F}_L$
quello elettrostatico, uguale e opposto a quello indotto

Il c. elettrico totale e' zero :
situazione simile a quella all'interno di una pila

Tipi di f.e.m. indotte - 2

f.e.m.mozionale
Sbarra conduttrice rotante in c. magnetico esterno



Forza di Lorentz su cariche libere

Accumulazione di carica

$\rightarrow$ Campo elettrico equilibratore

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{F}_L}{q} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$v = \omega r$$

$$\mathcal{E} = -\int_{meta'sbarra} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = -\int_0^{+L} \omega r B\, dr = -\frac{1}{2}\omega B L^2$$

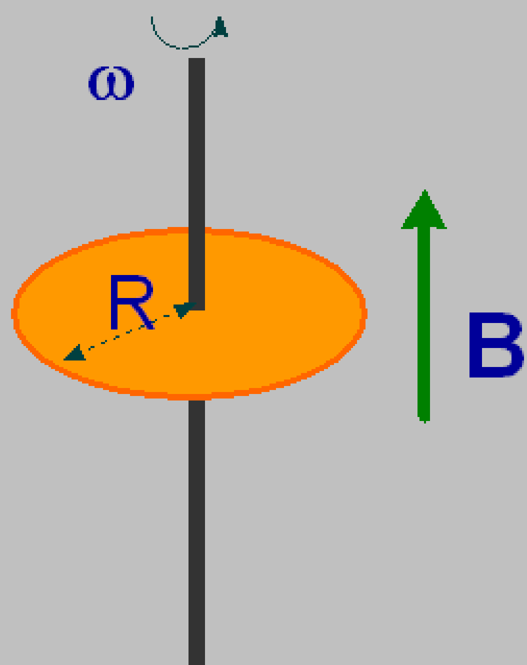
$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\int_{meta'sbarra} (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\int_{area} \underbrace{(d\mathbf{s} \times d\mathbf{l})}_{dA} \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\int_{area} B\, dA = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Tipi di f.e.m. indotte - 3

f.e.m. mozionale

Disco conduttore rotante in
c. magnetico esterno



Solita condizione: forza di Lorentz etc

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} \rightarrow E = -\omega r B$$

$$\rightarrow \mathcal{E} = \int_{raggio} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{o}^{R} \omega r B \, dr = -\frac{1}{2} \omega B R^2$$

Legge di Faraday

In tutti i casi considerati:

*il flusso di **B** " tagliato" dal conduttore in moto varia nel tempo*
La variazione del flusso induce una d.d.p. fra punti diversi del conduttore

Legge di Faraday-Neumann:

$$\mathcal{E}_C = -\frac{d\Phi_C(B)}{dt}$$

d.d.p. fra gli estremi del circuito, o "f.e.m. indotta"

derivata del flusso tagliato dal circuito

Legge di Faraday e circuiti

Per conduttore che 'taglia' le linee di campo di **B**:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$$

f. di Lorentz sui portatori $\leftrightarrow$ separazione delle cariche $\leftrightarrow$ fem indotta

$$\mathcal{E} = \int_{conduttore} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

Nel riferimento di quiete della sbarretta:

vel. portatori $\sim 0 \rightarrow$ nessuna f. di Lorentz

Separazione delle cariche?

C. elettrico indotto, originato dalla trasformazione di Lorentz del c. magnetico

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Considerando un circuito chiuso:

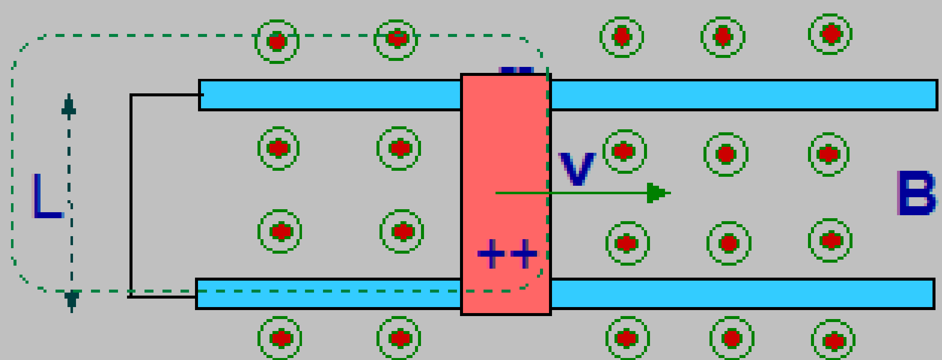
Corrente indotta

$$i = -\frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(B)}{dt} = -\frac{1}{R}\oint_{circuito} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

Flusso variabile $\rightarrow$ fem $\rightarrow$ C. elettrico *non* conservativo

Flusso variabile - 1

Slitta conduttrice mobile su rotaie conduttrici:



Forza di Lorentz su cariche libere
→ Cariche messe in movimento da $\mathbf{F}_L$
→ Corrente
Qual e' la forza elettromotrice che origina la corrente?

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{q}\oint_{circuito} \mathbf{F}_L \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{q}\int_{slitta} q(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{s} = -vBL$$

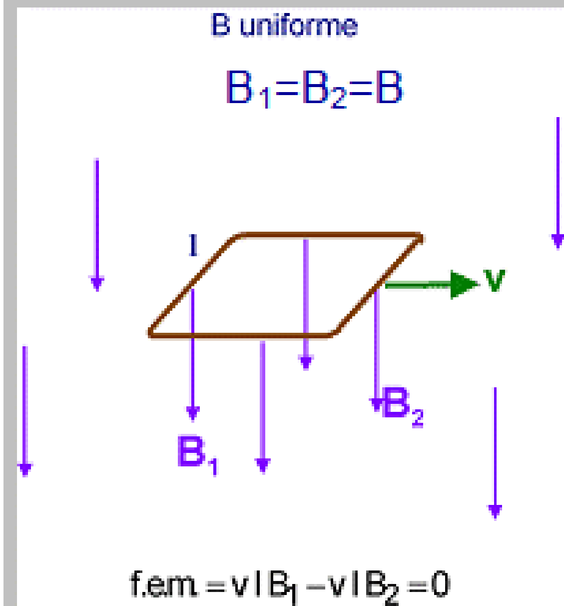
Considerando il "circuito" indicato:

$$\Phi_{circ}(\mathbf{B}) = BA(t) = BLvt$$

$$\rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Flusso variabile - 2

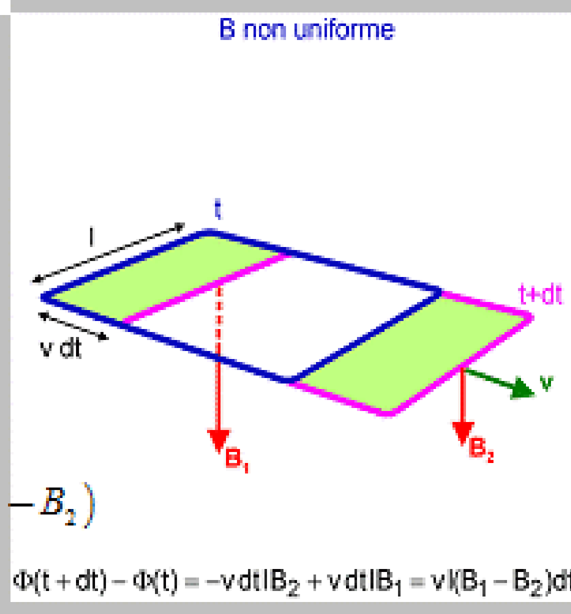
Circuito chiuso in moto, B uniforme: f.e.m. = 0



$$fem_1 = vBl$$
$$fem_2 = -vBl$$
(tratto percorso in verso opposto)
$$\rightarrow E = fem_1 + fem_2 = 0$$

Circuito chiuso in moto, B non uniforme: f.e.m. $\neq$ 0

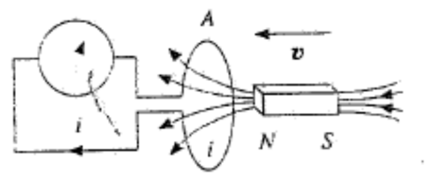
$$f.e.m._1 = vB_1 l$$
$$f.e.m._2 = -vB_2 l$$
$$\rightarrow \mathcal{E} = f.e.m._1 + f.e.m._2 = vl\left(B_1 - B_2\right)$$

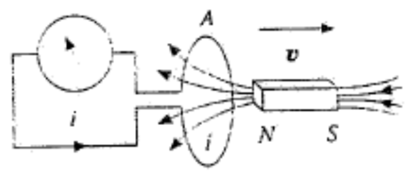


$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Flusso variabile - 3

Allontanamento/Avvicinamento della sorgente di ***B*** alla spira:





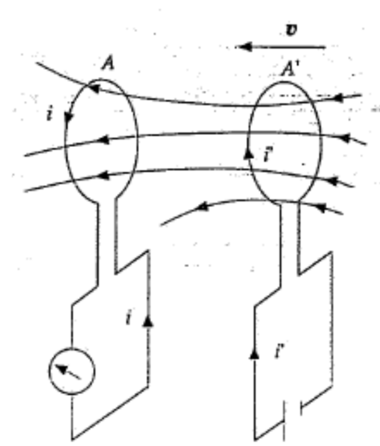
Corrente indotta $\leftrightarrow$ fem indotta $\leftrightarrow$ C. elettrico indotto

Avvicinamento/Allontanamento della spira dalla sorgente di ***B***:
Idem

Anche in questi casi:

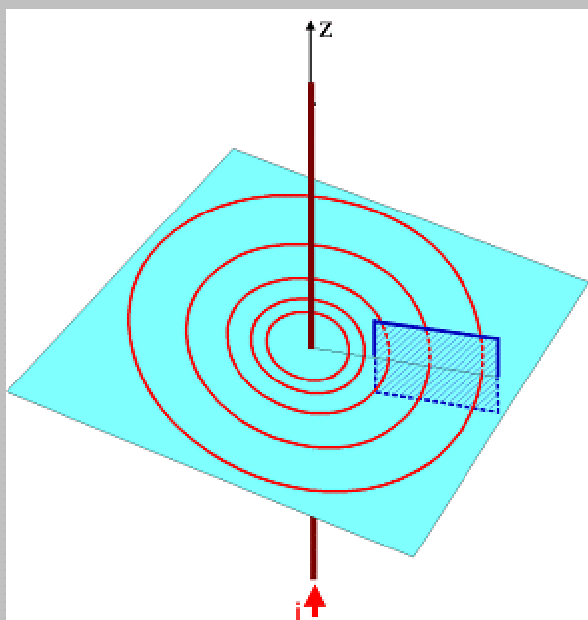
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$$

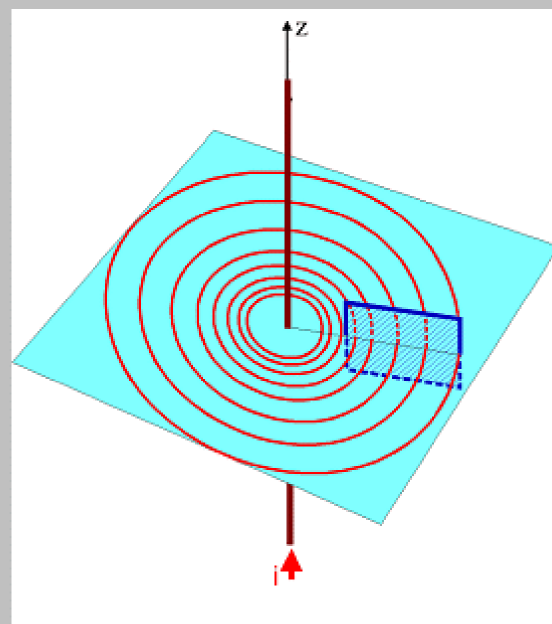
Valida anche se la sorgente di ***B*** e' un altro circuito percorso da corrente



f.e.m. non mozionale

Corrente variabile $\rightarrow$ **B** variabile





Circuito fermo $\rightarrow$ **v** = 0 $\rightarrow$ $\mathbf{F}_{Lorentz} = 0$

Nondimeno: Corrente indotta $\neq$ 0 !
Vale ancora:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Legge di Faraday

In tutti i casi considerati:

*il flusso di **B** concatenato con il circuito varia nel tempo*

Perche' ci sia corrente nel circuito, ci deve essere una forza elettromotrice

Legge di Faraday-Neumann:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

f.e.m. indotta

derivata del flusso concatenato al circuito

Quindi, come prima:
un flusso variabile induce una f.e.m. distribuita nel circuito

Un paio di punti importanti

1) f.e.m. non mozionali: Origine non chiara.
Ma: Una corrente e' *sempre* un moto di cariche
Le azioni sulle cariche le esercitano i campi elettrici
$\rightarrow$ Ci deve essere un campo elettrico da qualche parte, anche in questo caso

2) Correnti indotte *uguali* sia se avvicino un circuito a un magnete fermo , sia se avvicino un magnete a un circuito fermo.

Spiegazioni diverse nei due casi
I caso: f.e.m. mozionale
II caso: regola del flusso

Ma: *Fenomeni equivalenti* , secondo il principio di relativita'

$\rightarrow$ Relazione fra E e B in sistemi di riferimento diversi (Einstein 1905)

Campo elettrico indotto

Nell'ultimo esempio, la corrente indotta compare in un circuito fermo.
Unica forza che accelera cariche ferme: forza *elettrica*.
$\rightarrow$La forza elettromotrice deve essere dovuta a un *campo elettrico*
D'altra parte sappiamo che:

$$\mathcal{E} = \oint_{circuito} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

Quindi il campo elettrico elettromotore non soddisfa

$$\oint_{circuito} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \leftarrow \text{non soddisfatta}$$

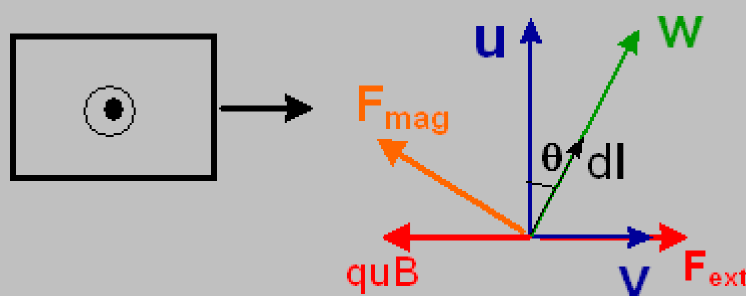
Quindi:
il campo elettrico originato da un campo ***B*** *variabile non si puo' scrivere come il gradiente di un potenziale*

Osservazione

Forza di Lorentz: mantiene in movimento le cariche

Corrente: richiede lavoro, vista la resistenza del conduttore

Chi sta compiendo lavoro sulle cariche, visto che $\mathbf{F}_L$ non compie lavoro?



Quando la corrente circola:

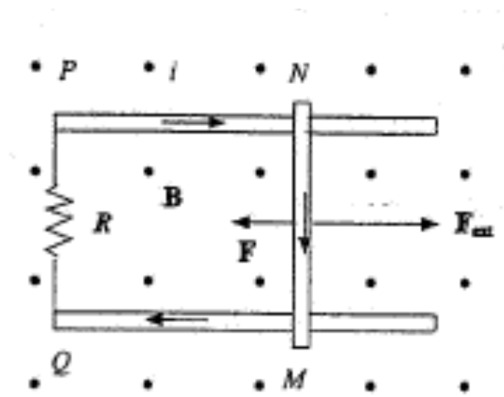
u: vel. deriva
v: vel. spira
w: vel. totale
$\mathbf{F}_{ext}$: mantiene in moto la spira
$\mathbf{F}_{mag}$: forza magnetica totale ⊥ vel. totale
d**l**: spostamento elementare

Lavoro elementare forza esterna:

$dL = quB\ \sin\theta\ dl/\cos\theta = qvB\ dl = d\mathscr{E}$

Considerazioni energetiche

Esempio 1



$\mathcal{E} = -vBb$

$\rightarrow i = \dfrac{-vBb}{r+R}, \quad r$ res. sbarretta

$\mathbf{E}_i = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$

$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{el} + \mathbf{E}_i = 0$ sbarretta (equilibrio)

$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{el}$ resto del circuito

$$\oint_{circuito} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{circuito} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = \int_M^N \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = vBb$$

$\mathbf{F}_m = i\mathbf{l} \times \mathbf{B} \rightarrow F_m = \dfrac{-vBb}{r+R} bB = -\dfrac{vB^2b^2}{r+R}$

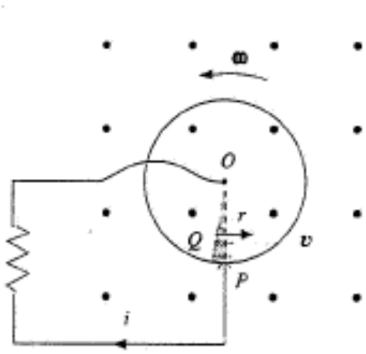
$\rightarrow$ Per mantenere la sbarretta in moto con vel. $\mathbf{v}$:

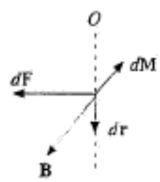
$\mathbf{F}_{ext} = -\mathbf{F}_m \rightarrow F_{ext} = \dfrac{vB^2b^2}{r+R}$

$P_{ext} = \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{v} = \dfrac{v^2B^2b^2}{r+R} = (r+R)i^2 = \mathcal{E}i$

$\rightarrow$ Pot. meccanica trasformata in pot. elettrica nel carico

Esempio 2





$$\mathbf{E}_i = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \omega r B \hat{\mathbf{u}}_r$$

$$\mathcal{E} = \int_O^P \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = \int_O^P \omega r B dr = \frac{1}{2}\omega B a^2$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\omega B a^2}{2R}$$

$d\mathbf{F}_m = i d\mathbf{r} \times \mathbf{B}$ f. sull'elemento di corrente radiale

Mom. meccanico elementare della forza magnetica:

$$d\mathbf{M}_m = \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_m = -\frac{\omega B^2 a^2}{2R} r dr \hat{\mathbf{u}}_r$$

$$\rightarrow \mathbf{M}_m = \int \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_m = -\int_0^a \frac{\omega B^2 a^2}{2R} r dr \hat{\mathbf{u}}_r = -\frac{\omega B^2 a^4}{4R} \boldsymbol{\omega}$$

Per mantenere il disco in rotazione:

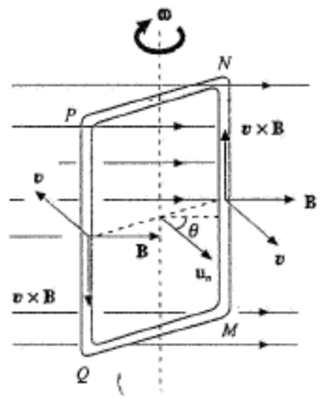
Mom. meccanico esterno

$$\mathbf{M}_{ext} = -\mathbf{M}_m$$

Pot. meccanica esterna:

$$P_{ext} = \mathbf{M}_{ext} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\mathbf{M}_m \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{\omega^2 B^2 a^4}{4R} = \mathcal{E} i$$

Esempio 3



Usando il flusso tagliato:

Lati spira: $MN = s, NP = s'$

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = vB\sin\theta s + 0 + vB\sin\theta s + 0 = 2vB\sin\theta s$$

$$v = \frac{\omega s'}{2}$$

$$\rightarrow \mathcal{E} = 2B\sin\theta s\frac{\omega s'}{2} = \omega BA\sin\theta$$

$$\theta = \omega t$$

$$\rightarrow \mathcal{E} = \omega BA\sin\omega t$$

Usando la legge di Faraday:

$$\Phi(B) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = BA\cos\theta = BA\cos\omega t$$

$$\rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega BA\sin\omega t$$

Fem sinusoidale

$$\rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\omega BA\sin\omega t}{R}, \quad R \text{ resistenza}$$

$$\rightarrow P_{el} = Ri^2 = \frac{\omega^2 B^2 A^2 \sin^2 \omega t}{R}$$

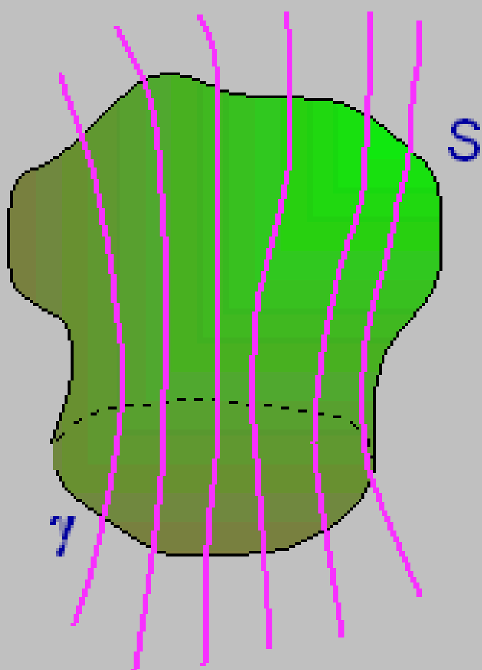
dissipata nel carico

Come al solito:

$$P_{mecc} = M_{mecc}\omega = -M_{mag}\omega = iAB\sin\theta\omega = \frac{\omega^2 B^2 A^2 \sin^2 \omega t}{R}$$

necessaria per mantenere in rotazione la spira

Forma differenziale della legge di Faraday



$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\mathcal{E} = \oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \oiint_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\rightarrow \oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \oiint_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

Teorema del rotore:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oiint_{S} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A}$$

$$\rightarrow \oiint_{S} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt} \oiint_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Si osservi:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \left(\nabla \times \mathbf{A}\right)}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

In presenza di cariche *e* c. magnetici variabili:

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$