Lavoro di carica, energia elettrostatica, etc

Portare la carica Q dall'∞ a una sfera conduttrice di capacità C nell'origine costa lavoro: infatti il conduttore non rimane a potenziale costante, visto che non è attaccato a una batteria $\rightarrow$ Occorre spendere lavoro per compensare le forze repulsive/attrattive dovute alle cariche che si accumulano sulla sfera e a quelle eventualmente preesistenti.

$$\rightarrow dW = dqV' = dq\frac{q}{C}$$

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{Q^2}{2C}$$

NB Risultato indipendente dal modo con cui Q viene trasferita a C:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dq}{dt}V' = i(t)\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t')dt'$$

$$\rightarrow W = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{+\infty} i(t)\left[\int_{-\infty}^{t} i(t')dt'\right]dt'$$

Caso limite: Se $i(t) = Q\delta(t) \leftarrow$ Trasferimento istantaneo

$$\rightarrow W = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{+\infty} Q\delta(t)\int_{-\infty}^{t} Q\delta(t')dt'dt = \frac{Q^2}{C}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\int_{-\infty}^{t}\delta(t')dt'dt = \frac{Q^2}{2C}$$

Infatti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt\int_{-\infty}^{t^-}\delta(t')dt' = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{t^-}\delta(t')\delta(t)dtdt'$$

NB t^- altrimenti la carica dq interagirebbe con se stessa

$$u = \frac{t+t'}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{t-t'}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v), \quad t' = \frac{1}{\sqrt{2}}(u-v)$$

$$\rightarrow |J| = 1$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{t^-}\delta(t)\delta(t')dtdt' = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0^-}\delta(u+v)\delta(u-v)dudv = \int_{-\infty}^{0^-}\delta(u-v)dv\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(u+v)du$$

$$= \int_{0^-}^{+\infty}\delta(-2v)dv = \int_{0^-}^{+\infty}\delta(2v)dv = \frac{1}{2}$$

Il lavoro totale W è eguale all'energia potenziale del c. elettrostatico originato dalla sfera:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2},\ \ r \geq a \text{ raggio della sfera}$$

$$\to u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^4}$$

$$\to U_E = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\int_{spazio}\frac{dV}{r^4} = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\int_{spazio}\frac{r^2 dr d\Omega}{r^4} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_a^\infty \frac{dr}{r^2}$$

$$\to U_E = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} = \frac{Q^2}{2C}$$

Osservazione: $W = U_E \to \infty$ per $a \to 0$

$\to$ Energia infinita necessaria per 'assemblare' una carica puntiforme

$\to$ Problema non si risolve considerando altri modelli (sfera piena,...)

$\to$ Origine di difficoltà storiche dell'elettrodinamica classica

$\to$ Energia infinita di fatto non presa in considerazione (!)

tranne che per elucubrazioni poco o niente realistiche per eliminarla, p es

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = m_e c^2 \to a \equiv r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} \simeq 2.8\, fm, \ \ \text{'raggio classico' dell'elettrone}$$

Punto di vista diverso in fisica delle particelle:

Carica elettrica: quantizzata

Origine della massa: non elettromagnetica

Infiniti: 'rimossi' con procedure non banali in elettrodinamica quantistica

Nel caso sulla sfera sia preesistente una carica q_1 e venga trasferita una carica q_2 :

$$\rightarrow dW = dqV' = dq\frac{(q_1+q)}{C}$$

$$\rightarrow W = \int_0^{q_2} \frac{(q_1+q)}{C}dq = \frac{q_1 q_2}{C} + \frac{q_2^2}{2C}$$

En. potenziale finale e iniziale

$$U_{fin} = \frac{(q_1+q_2)^2}{2C}, U_{in} = \frac{q_1^{\ 2}}{2C}$$

$$\rightarrow \Delta U = \frac{(q_1+q_2)^2}{2C} - \frac{q_1^{\ 2}}{2C} = \frac{q_1 q_2}{C} + \frac{q_2^{\ 2}}{2C} = W$$