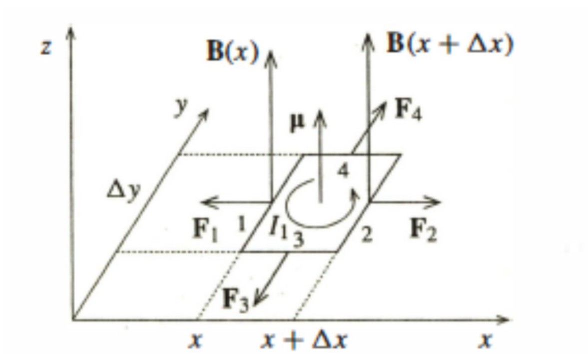
Energetica dei dipoli in un campo esterno

a) Dipolo magnetico

Specializzando al caso di una spira $(\sim dipolo)$ in un c. esterno:
Espressione di U_{int} in termini di $\boldsymbol{\mu},\mathbf{B},$ gia' trovata:
$U_{\text{int}} = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$
Modo equivalente di trovare U_{int} :
Traslazione della spira da regione con $\mathbf{B}=0$ a posizione finale in $\mathbf{B}$



$\mathbf{F}_3,\mathbf{F}_4 \ \perp spost \rightarrow W = 0$

$$dW = -(F_2 - F_1)\,dx = -\left[i_1\Delta y B(x+dx) - i_1\Delta y B(x)\right]dx$$

$$\rightarrow dW = -i_1\Delta y\left[B(x+dx) - B(x)\right]dx \approx -i_1\Delta y\frac{dB}{dx}\Delta x dx$$

$$\rightarrow dW = -\mu\frac{dB}{dx}dx$$

$$\rightarrow W = -\mu\int_0^B dB = -\mu B$$

In generale $U_{\text{int}} = W = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$

$U_{\text{int}} \equiv \ U_{mecc}$ *non* e' l'en. totale del sistema:
manca il lavoro (esterno) necessario a mantenere costanti $\boldsymbol{\mu}$ e $\mathbf{B}$
Tuttavia: questo secondo contributo non viene di solito considerato, perche' non e' interno al sistema (en. fornita dai/ai generatori inseriti in 1 e 2 non conteggiata nel bilancio energetico legato alla dinamica del dipolo)

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt}$$

$$d\Phi_{21} = B\left(x+\Delta x\right)dx\Delta y - B\left(x\right)dx\Delta y = \left[B\left(x+\Delta x\right) - B\left(x\right)\right]dx\Delta y$$

$$\to d\Phi_{21} \approx \frac{dB}{dx}\Delta x\Delta y dx$$

$$\to \mathcal{E}_1 = -\frac{dB}{dx}\Delta x\Delta y\frac{dx}{dt}$$

Per mantenere costante i_1, 1 deve contenere un generatore che eroghi la potenza (elettrica)

$$P_{el} = -\mathcal{E}_1 i_1 \to dW_{el}^{(1)} = -\mathcal{E}_1 i_1 dt = d\Phi_{21} i_1 \to dW_{el}^{(1)} = \frac{dB}{dx}dx\underbrace{\Delta x\Delta y i_1}_{\mu} = +\mu dB$$

$$\to W_{el}^{(1)} = \int_0^B \mu dB = +\mu B = U_{el} = +i_1\Phi_{21}$$

Generalizzando:

$$U_{el} = W_{el}^{(1)} = +\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$$

Quindi:

$$U_{mecc} + U_{el} = 0 \quad !!$$

conseguenza del fatto che il lavoro totale e' uguale al lavoro eseguito sui portatori liberi dalla forza magnetica:

$$\mathbf{F}_m \perp \mathbf{v} \to W = 0$$

Infine: lavoro elettrico necessario a mantenere costante $\mathbf{B}$

Supponiamo che $\mathbf{B}$ sia originato da una spira 2:

$$dW_{el}^{(2)} = -\mathcal{E}_2 i_2 dt = i_2 d\Phi_{12} \to W_{el}^{(2)} = i_2\Phi_{12} = i_1\Phi_{21} = W_{el}^{(1)} = +\mu B$$

$$\to U_{tot} \equiv U_{mecc} + W_{el}^{(1)} + W_{el}^{(2)} = +\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$$

b) Dipolo elettrico

Espressione gia' trovata:

$$U_{\text{int}} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

In questo caso $U_{\text{int}} \equiv U_{mecc}$ coincide con l'en.totale del dipolo, perche' non ci sono termini aggiuntivi dovuti a fem indotte come nel caso del dipolo magnetico