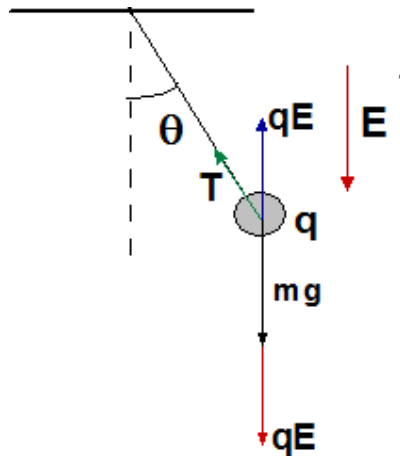


Esercizi 1 – Forza e campo

1. Un campo elettrico verticale e' applicato in una regione in cui si trova un pendolo, costituito da una pallina con carica q sospesa a un filo di lunghezza L . Trovare la variazione nel periodo del pendolo quando il campo e' è diretto:
 - a. Verso l'alto
 - b. Verso il basso



Il diagramma mostra le forze agenti sulla pallina. La componente non equilibrata, che dà origine al moto periodico, si scrive (i segni + e - si riferiscono a campo verso il basso e verso l'alto, rispettivamente):

$$F_c = -(mg \pm qE) \sin \theta \simeq -(mg \pm qE) \theta \quad \text{se } \theta \ll 1$$

$$\rightarrow mL \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -(mg \pm qE) \theta$$

$$\rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \left(\frac{mg \pm qE}{mL} \right) \theta = 0$$

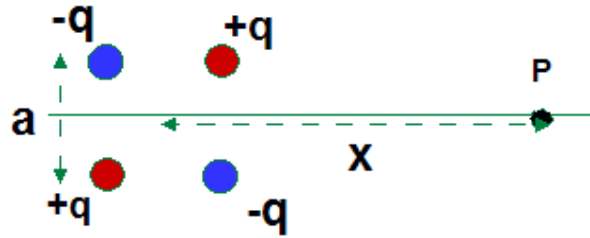
Questa è l'equazione del moto armonico; la frequenza angolare del moto è data da:

$$\omega^2 = \left(\frac{mg \pm qE}{mL} \right)$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g \pm qE/m}}$$

Cosa succede se $g \leq qE/m$?

2. Un tipo di quadrupolo elettrico e' costituito da 4 cariche poste ai vertici di un quadrato di lato a . Trovare il campo elettrostatico a distanza $x \gg a$ sull'asse del quadrupolo



Il campo e' quello di 2 dipoli spostati della distanza $+a/2$ e $-a/2$. Il primo da' sui punti dell'asse x solo la componente y diretta verso il basso, il secondo diretta verso l'alto.

Contributo del primo dipolo:

$$E_y^1 = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{(x-a/2)^2 + (a/2)^2} \frac{a/2}{\left((x-a/2)^2 + (a/2)^2\right)^{3/2}} \right)$$

Contributo del secondo dipolo:

$$E_y^2 = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{(x+a/2)^2 + (a/2)^2} \frac{a/2}{\left((x+a/2)^2 + (a/2)^2\right)^{3/2}} \right)$$

Campo totale:

$$E = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{\left((x-a/2)^2 + (a/2)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left((x+a/2)^2 + (a/2)^2\right)^{3/2}} \right)$$

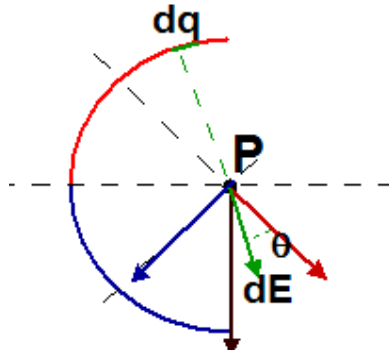
Per $x \gg a$ si trascurano i termini $(a/2)^2$, si tengono solo i termini di ordine x^3 e x^2 nei cubi dei binomi, e si sviluppano in serie di Taylor al I ordine in $a/2x$ le frazioni che rimangono

$$E \approx \frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{(x-a/2)^3} + \frac{1}{(x+a/2)^3} \right) \approx \frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{(x^3 - 3x^2 a/2)} + \frac{1}{(x^3 + 3x^2 a/2)} \right)$$

$$E \approx \frac{qa}{4\pi\epsilon_0 x^2} \left(-\frac{1}{(x - 3a/2)} + \frac{1}{(x + 3a/2)} \right) \approx \frac{qa}{4\pi\epsilon_0 x^2} \left(-\frac{1}{x} \left(1 + 3\frac{a}{2x} \right) + \frac{1}{x} \left(1 - 3\frac{a}{2x} \right) \right)$$

$$E \approx \frac{qa}{4\pi\epsilon_0 x^3} \left(-\left(1 + 3\frac{a}{2x} \right) + \left(1 - 3\frac{a}{2x} \right) \right) = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0 x^3} \left(-3\frac{a}{2x} - 3\frac{a}{2x} \right) = -\frac{6qa^2}{8\pi\epsilon_0 x^4}$$

3. Una sottile bacchetta isolante ha forma di arco semicircolare di raggio R . Sulla metà superiore e' distribuita uniforme mente una carica $+q$, e su quella inferiore una carica $-q$. Trovare il campo nel centro della semicirconferenza.



Per il principio di sovrapposizione, il campo totale e' la somma vettoriale dei contributi dalle cariche positive e negative.

Cariche positive: il campo risultante deve essere allineato con la bisettrice del quadrante in alto (freccia rossa). Il contributo elementare della carica dq e':

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \cos\theta$$

e il contributo totale

$$E = \int dE = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \cos\theta$$

$$dq = \lambda ds = \lambda R d\theta$$

$$\lambda = \frac{q}{(\pi/2)R}$$

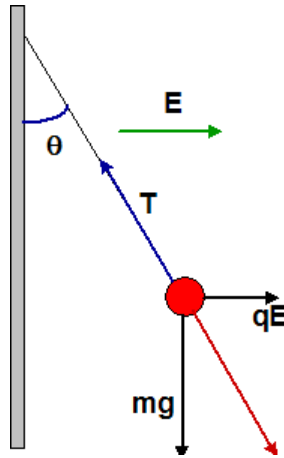
$$\rightarrow E = \int dE = \int_{-\pi/4}^{+\pi/4} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\theta}{R^2} \cos\theta$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \sin\theta \Big|_{-\pi/4}^{+\pi/4} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \sqrt{2}$$

Cariche negative: risultato uguale in modulo e direzione come la freccia blu
Quindi: campo totale diretto verso il basso, con modulo:

$$E_{tot} = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} = \frac{1}{\pi^2\epsilon_0} \frac{2Q}{R^2}$$

4. Su una piccola sfera isolante di massa $m=1.12 \text{ mg}$ e' presente una carica $q = 19.7 \text{ nC}$. Essa e' appesa al soffitto con un filo di massa trascurabile, attaccato ad una parete isolante uniformemente carica con densita' superficiale σ . Si osserva che all'equilibrio il filo forma un angolo $\theta=30$ gradi. Determinare σ .



Il campo della distribuzione piana, uniforme di carica e'

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

La condizione di equilibrio richiede che la risultante della forza elettrica e di quella di gravita' sia allineata con il filo, lungo il quale agisce la tensione T . Quindi:

$$\tan \theta = \frac{qE}{mg} = \frac{q\sigma}{2mg\epsilon_0}$$
$$\rightarrow \sigma = \frac{2mg\epsilon_0}{q} \tan \theta = 5.12 \text{ nC} / \text{m}^2$$