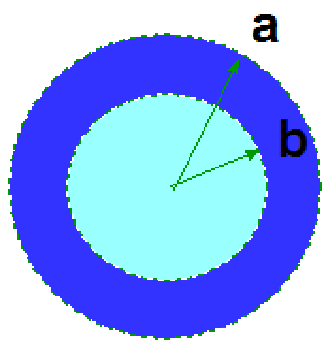
Esercizi 2 – Legge di Gauss

1. Un involucro sferico isolante ha raggi interno ed esterno a e b, ed e' caricato con densita' uniforme ρ. Disegnare il diagramma di E in funzione di r

La geometria e' mostrata nella figura:



Usiamo il teorema di Gauss, utilizzando come superficie gaussiane sfere di raggio r concentriche alla distribuzione di carica. A seconda del valore di r troveremo, per il teorema di Gauss:

$$\Phi(E) = E4\pi r^2 = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon_0} \quad \text{r>a}$$
$$\Phi(E) = E4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\varepsilon_0} \quad \text{b>r>a}$$
$$\Phi(E) = E4\pi r^2 = 0 \quad \text{r<b}$$

Si ha:

$$Q_{tot} = \rho V_{guscio} = \rho\left(\frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{4}{3}\pi b^3\right) = \frac{4}{3}\pi\rho\left(a^3 - b^3\right)$$
$$q(r) = \rho V_{\text{fra } b \text{ e raggio } r} = \rho\frac{4}{3}\pi\rho\left(r^3 - b^3\right)$$

Quindi:

$$\Phi(E) = E4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho\left(a^3 - b^3\right)}{\varepsilon_0} \quad \text{r>a}$$
$$\Phi(E) = E4\pi r^2 = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi\rho\left(r^3 - b^3\right)}{\varepsilon_0} \quad \text{b>r>a}$$
$$\Phi(E) = E4\pi r^2 = 0 \quad \text{r<b}$$

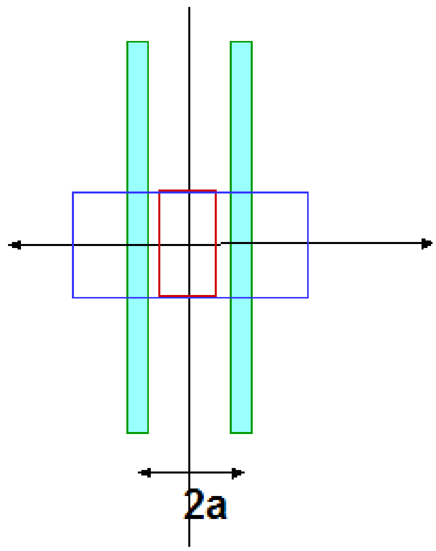
e

$$E = \frac{\rho}{3r^2\varepsilon_0}\left(a^3 - b^3\right) \qquad r>a$$

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{b^3}{r^2}\right) \qquad b>r>a$$

$$E = 0 \qquad r<b$$

2. Due piani infiniti e paralleli a distanza *2a* sono carichi con densita' superficiale s>0. Determinare il campo elettrico nelle tre regioni spaziali definite dai piani



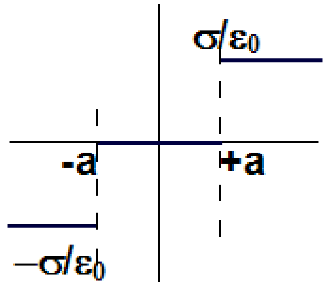
Possiamo applicare il teorema di Gauss usando come superficie gaussiana un cilindro centrato nell'origine, con altezza *2x* e area di base *A*, come indicato. Il campo elettrico sara' ortogonale ai piani, per ragioni di simmetria: allora il flusso totale di ***E*** e' solo attraverso le basi, e si puo' scrivere:

$$\Phi(E) = 2 \cdot AE$$

$x < a$ (cilindro rosso): $\Phi(E) = 2 \cdot AE = 0 \qquad \rightarrow E = 0$

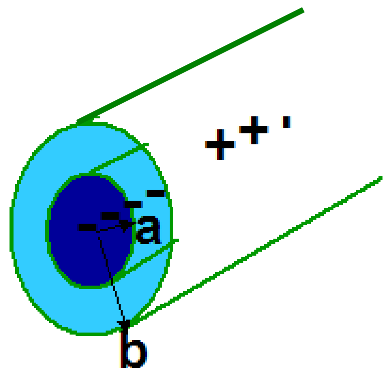
$x > a$ (cilindro blu): $\Phi(E) = 2 \cdot AE = \dfrac{2\sigma A}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

L'andamento del campo elettrico in funzione di *x* e' il seguente:



3. Due lunghi cilindri metallici coassiali hanno raggio *a* e *b* rispettivamente. Sui cilindri e' presente una densita' lineare di carica λ, uguale e opposta.

   a. Determinare il campo elettrico in funzione della distanza dall'asse dei cilindri



Usiamo il teorema di Gauss, scegliendo come superficie gaussiana un cilindro di raggio *r* e lunghezza *L*, coassiale ai due cilindri carichi. Per simmetria, nell'approssimazione di cilindro infinito il campo non puo' avere componenti longitudinali, ma solo radiali (come al solito, il contributo longitudinale degli elementi di carica da un lato e' compensato da quello di altrettanti elementi dall'altro); quindi il flusso e' solo attraverso l'area laterale della superficie gaussiana, sulla quale il modulo di E e' costante:

$$\Phi(E) = 2\pi r L E = \begin{cases} 0 & r<a \quad \text{carica contenuta zero} \\ \dfrac{\lambda L}{\varepsilon_0} & a<r<b \quad \text{carica negativa sul cilindro metallico interno} \\ 0 & r>b \quad \text{carica negativa + carica positiva : zero} \end{cases}$$

Quindi il campo vale 0 fuori dal volume delimitato dai due cilindri, mentre vale $E = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ entro il volume stesso

b. Consideriamo un positrone (ossia, un elettrone positivo: stessa massa ma carica opposta a quella dell'elettrone) che si muove all'interno del campo elettrico su un'orbita circolare. Calcolare la sua energia cinetica.

La forza centripeta deve essere data dalla forza elettrostatica; quindi:

$$m\frac{v^2}{r} = eE = -e\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\rightarrow en.cinetica = \frac{1}{2}mv^2 = e\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}$$