1. Una carica puntiforme $Q = 3 10^{-10} C$ e' posta al centro di una sfera dielettrica di raggio $R = 10\ cm$ e costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 4$.

Fuori della sfera c'e' il vuoto.

Trovare:

a) Il c. elettrico alle distanze $r_1 = R/2$ e $r_2 = 2R$ dalla carica

2) La densita' di carica di polarizzazione sulla superficie della sfera

$$\int_{sfera\ gaussiana} \mathbf{D} \cdot \mathbf{d\Sigma} = Q$$

$$\rightarrow D 4\pi r^2 = Q \rightarrow D = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2}$$

$$\rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \dfrac{Q}{r_1^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \dfrac{Q}{(R/2)^2} \approx 2.7 10^2\ Vm^{-1} \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{Q}{r_2^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{Q}{(2R)^2} \approx 0.7 10^2\ Vm^{-1} \end{cases}$$

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = P$$

$$D = \varepsilon_0 E + P \rightarrow P = D - \varepsilon_0 E = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{R^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_r} \frac{Q}{R^2}$$

$$\rightarrow \sigma_P = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{R^2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{R^2} \approx 2 10^{-9} C m^{-2}$$

2. Una sfera metallica di raggio R, isolata, e' ricoperta da un guscio dielettrico di raggio interno R e spessore δ.
Trovare la capacita' del sistema.

$$C = \frac{Q}{\phi}$$

$$\phi = \int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad \Gamma \text{ percorso da } R \text{ a } \infty$$

$$E_{sfera} = 0$$

$$\rightarrow \phi = \int_{R}^{\infty} E dr = \int_{R}^{R+\delta} E_{diel} dr + \int_{R+\delta}^{\infty} E_{vuoto} dr$$

$$E_{diel} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2}, \quad R < r < R+\delta$$

$$E_{vuoto} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}, \quad R+\delta < r < \infty$$

$$\rightarrow \phi = \int_{R}^{R+\delta} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2} dr + \int_{R+\delta}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} dr$$

$$\rightarrow \phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(-\frac{Q}{r}\right)_{R}^{R+\delta} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{Q}{r}\right)_{R+\delta}^{\infty}$$

$$\rightarrow \phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{Q}{R} - \frac{Q}{R+\delta}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R+\delta}$$

$$\rightarrow \phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_r R} - \frac{1}{\varepsilon_r\left(R+\delta\right)} + \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r\left(R+\delta\right)}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+\delta} + \frac{\varepsilon_r}{R+\delta}\right)$$

$$\rightarrow \phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R} + \frac{\varepsilon_r - 1}{R+\delta}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{\left(R+\delta\right) + \left(\varepsilon_r - 1\right)R}{R\left(R+\delta\right)}$$

$$\rightarrow \phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{\varepsilon_r R + \delta}{R\left(R+\delta\right)}$$

$$\rightarrow C = \frac{Q}{\phi} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{R\left(R+\delta\right)}{\varepsilon_r R + \delta}$$

3. Una carica puntiforme Q e' posta su un piano che separa due dielettrici indefiniti e omogenei di costante dielettrica ε_1 e ε_2.
Trovare il potenziale ϕ in tutto lo spazio.

$$\int_{sfera\ gaussiana} \mathbf{D}\cdot\mathbf{d\Sigma} = Q$$

$$\rightarrow D4\pi r^2 = Q = \left(D2\pi r^2\right) + \left(D2\pi r^2\right)$$

$$D = \varepsilon E = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$$

$$E = -\frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$\rightarrow Q = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \left(-\frac{\partial \phi_1}{\partial r}\right) 2\pi r^2 + \varepsilon_0 \varepsilon_2 \left(-\frac{\partial \phi_2}{\partial r}\right) 2\pi r^2$$

$$\phi_1 = \frac{A}{r}, \phi_2 = \frac{B}{r}$$

Continuita' del potenziale sulla superficie di separazione:

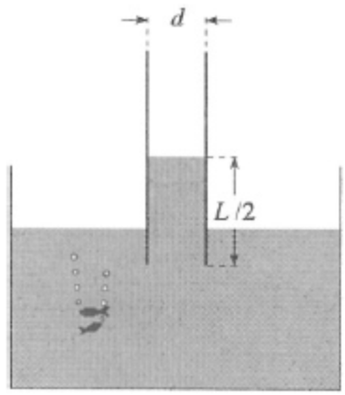
$$\rightarrow A = B$$

$$\rightarrow Q = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{A}{r^2} 2\pi r^2 + \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{B}{r^2} 2\pi r^2 = 2\pi \varepsilon_0 A\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)$$

$$\rightarrow A = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)}$$

$$\rightarrow \phi = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) r}$$

4. Un condensatore piano con le piastre quadrate di lato L e separazione d viene caricato con una ddp ϕ_0 e e poi staccato dalla batteria. Viene quindi immerso in un liquido di costante dielettrica ε_r fino a quando il liquido, risucchiato nel volume della capacita', riempie meta' del volume del condensatore.
Trovare: Capacita' del sistema, C. elettrico nel condensatore, densita' di carica sulle piastre



Capacita' in parallelo:

$$C = C_1 + C_2 = \varepsilon_0 \frac{L\frac{L}{2}}{d} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{L\frac{L}{2}}{d} = \varepsilon_0 \frac{L^2}{2d}\left(1+\varepsilon_r\right)$$

Carica costante:

$$C_0\phi_0 = C\phi$$

$$\rightarrow \varepsilon_0 \frac{L^2}{d}\phi_0 = \varepsilon_0 \frac{L^2}{d}\frac{1+\varepsilon_r}{2}\phi$$

$$\rightarrow \phi = \phi_0 \frac{2}{1+\varepsilon_r}$$

$$\rightarrow E = \frac{\phi}{d} = \frac{2\phi_0}{\left(1+\varepsilon_r\right)d}$$

$$\left.\begin{array}{l} D = \sigma_l \\ D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \end{array}\right\} \rightarrow E = \frac{\sigma_l}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

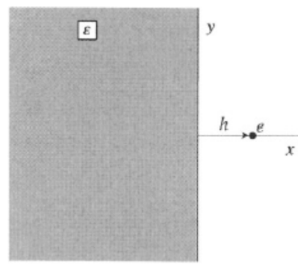
$$\rightarrow \sigma_l = \begin{cases} \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{2\phi_0}{\left(1+\varepsilon_r\right)d}, & \text{zona a contatto col fluido} \\ \varepsilon_0 \dfrac{2\phi_0}{\left(1+\varepsilon_r\right)d}, & \text{zona non a contatto col fluido} \end{cases}$$

5. Una carica puntiforme e e' posizionata fuori da un dielettrico omogeneo che riempie lo spazio nella regione $x < 0$, nel punto di coordinate $x = h, y = z = 0$

Trovare:

La densita' di carica di polarizzazione

Il campo elettrico originato dalle cariche di polarizzazione nel punto in cui si trova la carica e



C. elettrico:

$$\mathbf{E}\left(0^{+}, y, z\right) = \frac{e\left(-h\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + x\hat{\mathbf{k}}\right)}{4\pi\varepsilon_0\left(h^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} + \frac{\sigma_P}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{i}}$$

$$\mathbf{E}\left(0^{-}, y, z\right) = \frac{e\left(-h\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + x\hat{\mathbf{k}}\right)}{4\pi\varepsilon_0\left(h^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} - \frac{\sigma_P}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{i}}$$

NB C. elettrico di una distribuzione superficiale di carica:

$\mathbf{E} = \frac{\sigma_P}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{n}}$ versore normale

in cui σ_P in generale varia da punto a punto (come in questo caso)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} = \varepsilon_0\left(\varepsilon_r - 1\right)\mathbf{E}$$

$$\sigma_P = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \varepsilon_0\left(\varepsilon_r - 1\right)E_x\left(0^{-}, y, z\right)$$

$$\rightarrow \sigma_P = \varepsilon_0\left(\varepsilon_r - 1\right)\left[\frac{-eh}{4\pi\varepsilon_0\left(h^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} - \frac{\sigma_P}{2\varepsilon_0}\right]$$

$$\rightarrow \sigma_P\left(1 + \frac{\varepsilon_r - 1}{2}\right) = -\left(\varepsilon_r - 1\right)\frac{eh}{4\pi\left(h^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

$$\rightarrow \sigma_P = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\frac{eh}{2\pi\left(h^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

$$\mathbf{E}'(h,0,0) = \int_{piano} \sigma_P dA \frac{h\hat{\mathbf{i}}}{4\pi\varepsilon_0\left(h^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\rightarrow \mathbf{E}'(h,0,0) = \int_{piano} -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\frac{eh}{2\pi 4\pi\varepsilon_0\left(h^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} dA \frac{h\hat{\mathbf{i}}}{\left(h^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\rightarrow \mathbf{E}'(h,0,0) = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\frac{e}{8\pi^2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{i}}\int_{piano}\frac{h^2 dA}{\left(h^2+y^2+z^2\right)^3}$$

$$\rightarrow \mathbf{E}'(h,0,0) = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\frac{e}{8\pi^2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{i}}\int_{piano}\frac{h^2 r dr d\varphi}{\left(h^2+r^2\right)^3}$$

$$\rightarrow \mathbf{E}'(h,0,0) = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\frac{2\pi e h^2}{8\pi^2\varepsilon_0 2}\hat{\mathbf{i}}\int_{piano}\frac{2rdr}{\left(h^2+r^2\right)^3}$$

$$\rightarrow \mathbf{E}'(h,0,0) = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\frac{2\pi e h^2}{8\pi^2\varepsilon_0 2}\hat{\mathbf{i}}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(h^2+r^2\right)^{-2}\Big|_0^\infty$$

$$\rightarrow \mathbf{E}'(h,0,0) = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\frac{e h^2}{8\pi\varepsilon_0}\hat{\mathbf{i}}\left(\frac{1}{2}\right)\left(0 - \frac{1}{h^4}\right) = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\frac{e}{16\pi\varepsilon_0 h^2}\hat{\mathbf{i}}$$

6. Un condensatore piano ha capacita' a vuoto $C_0 = 50nF$, ed e' collegato a una batteria di fem $V = 12\ V$. Se fra le armature viene inserito un isolante, si trova che la carica varia di $\Delta Q = 40\ nC$. Determinare:

   a) La costante dielettrica dell'isolante
   b) Il lavoro compiuto dalla batteria

Cap. finale:

$$C = C_0\varepsilon_r$$

$$Q_0 = C_0 V \rightarrow Q = CV = C_0\varepsilon_r V$$

$$\rightarrow \Delta Q = C_0 V(\varepsilon_r - 1)$$

$$\rightarrow \varepsilon_r = 1 + \frac{\Delta Q}{C_0 V} \simeq 1.07$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}CV^2 - \frac{1}{2}C_0V^2 = \frac{1}{2}C_0V^2(\varepsilon_r - 1) \simeq 0.25\ \mu J$$

7. Un condensatore sferico ha raggi $R_1= 10\ cm$ e $R_2 = 20\ cm$;lo spazio fra le armature e' riempito con un isolante liquido di costante dielettrica $\varepsilon_r = 2.5$. Fra le armature viene stabilita una ddp $V = 20\ V$, con l'armatura interna a potenziale piu' positivo di quella esterna. Determinare:
   a) La carica sulle armature
   b) La densita' di carica di polarizzazione sulle superfici dell'isolante

   Successivamente il dielettrico viene tolto: determinare la ddp di potenziale fra le armature

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad \text{radiale}$$

$$\rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

$$\rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}$$

$$\rightarrow C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$

$$\rightarrow Q = CV_0 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} V_0 \simeq 1.1\ nC$$

$$D = \varepsilon_0 E + P$$

$$\rightarrow P = D - \varepsilon_0 E = \frac{Q}{4\pi r^2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_r r^2} = \frac{Q}{4\pi r^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) = \frac{Q}{4\pi r^2}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}$$

$$\sigma_P(R_1) = -P(R_1) = -\frac{Q}{4\pi R_1^2}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}, \quad \sigma = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1 = -P$$

$$\sigma_P(R_1) = +P(R_1) = +\frac{Q}{4\pi R_2^2}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}, \quad \sigma = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2 = +P$$

$$C' = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$

$$\rightarrow V_0' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}} \simeq 50\ \ V$$