Esercizi 3 – Potenziale, energia potenziale, condensatori

1. Una goccia sferica di acqua su cui e' presente una carica di 32 pC ha, alla superficie, un potenziale di 512 V.
   a. Qual e' il raggio della goccia?
   b. Se due gocce identiche (stessa carica e stesso raggio) coalescono a formare un'unica goccia, quale sara' il potenziale della goccia formata?

   Relazione fra carica e potenziale:

$$Q = CV \rightarrow C = \frac{Q}{V}$$

   Capacita' di una sfera conduttrice di raggio R:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

   Quindi:

$$C = \frac{Q}{V} \rightarrow 4\pi\varepsilon_0 R = \frac{Q}{V} \rightarrow R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 V} = 0.54 \quad \text{mm}$$

   Dopo coalescenza:

$$Q \rightarrow 2Q$$
$$\text{Volume} \rightarrow 2 \text{ Volume}$$
$$\text{Poiche': } \quad \text{Volume} \propto \text{r}^3$$
$$R \rightarrow \sqrt[3]{2}R \simeq 1.26R$$

   Quindi:

$$V \rightarrow V\frac{2}{1.26} \simeq \; V\;1.59 \simeq 795 \;\; \text{V}$$

2. Una carica elettrica Q di *-9.12 nC* e' uniformemente distribuita su un anello di raggio R pari a *1.48 m*, che giace nel piano *yz* e ha centro nell'origine. Una carica puntiforme q di *-5.93 pC* e' posizionata sull'asse x nel punto x_0*=3.07 m*. Calcolare il lavoro compiuto da un agente esterno per spostare la carica nell'origine.

Il lavoro fatto dall'agente esterno e' uguale e opposto al lavoro fatto dal campo elettrostatico; essendo quest'ultimo conservativo, il suo lavoro e' uguale alla variazione di en. potenziale cambiata di segno: Quindi:

$$L_{esterno} = -L_{campo} = -(-\Delta U) = \Delta U$$
$$\Delta U = q\Delta V = q\left(V_{finale} - V_{inziale}\right)$$

Il potenziale sull'asse si trova con il principio di sovrapposizione; assumendo uguale a 0 il potenziale all'infinito (ossia, costante arbitraria=0), il contributo di ogni elemento di anello (che e' coulombiano) e' dato da:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

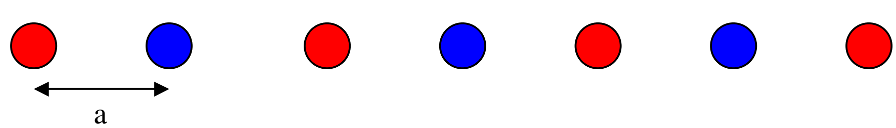
Tutti gli elementi dell'anello sono a uguale distanza dai punti sull'asse, per cui:

$$V = \int_{anello} dV = \int_{anello} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

Quindi:

$$\Delta U = q\left(V_{finale} - V_{inziale}\right)$$
$$V_{finale} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2}}$$
$$V_{inziale} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2 + x_0^2}}$$
$$\rightarrow L_{ezterno} = \Delta U = q\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R} - \frac{Q}{\sqrt{R^2 + x_0^2}}\right) \simeq 183 \text{ pJ}$$

3. Calcolare l'energia elettrostatica di una schiera 1-dimensionale infinita di cariche equispaziate, uguali in valore assoluto e alternate in segno



L'en. potenziale dello ione posto a coordinata $x=0$ e' la somma di infiniti contributi, la cui espressione generica e':

$$U_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=-\infty \\ j\neq 0}}^{+\infty}\frac{q^2(-1)^j}{r_{0j}} = \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{ja}$$

$$U_0 = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}2\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+....\right]$$

La quantita' *2[…]* si chiama *costante di Madelung* del cristallo 1-dimensionale.
Per calcolare la somma della serie (che e' la *serie armonica a segno alterno*) si puo' procedere come segue: si consideri lo sviluppo in serie di Taylor

$$f(x) = f(0) + f'(x)\big|_{x=0}x + \frac{1}{2!}f''(x)\big|_{x=0}x^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)\big|_{x=0}x^3 + ...$$

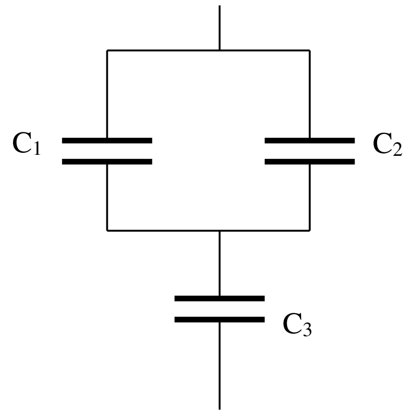
Prendiamo

$$f(x) = \ln(1+x) \to f(0) = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \to f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \to f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3} \to f'''(0) = 2$$
$$f''''(x) = -\frac{6(1+x)}{(1+x)^6} \to f''''(0) = -6$$
$$..........$$

Allora:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$
$$\to \ln(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$$
$$\to U_0 = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}2\ln(2)$$

4. Calcolare la capacita' equivalente di 3 condensatori collegati come in figura



La capacita' equivalente di C_1 e C_2, che sono in parallelo, e':

$$C_{12} = C_1 + C_2$$

La capacita' C_3 e' in serie alle 2, quindi:

$$\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3}$$
$$\rightarrow C_{123} = \frac{C_{12}C_3}{C_{12} + C_3}$$
$$\rightarrow C_{123} = \frac{\left(C_1 + C_2\right)C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

5. Trovare la forza di attrazione fra le armature di un condensatore piano

Le cariche sull'armatura negativa sono sottoposte al campo generato da quelle dell'armatura positiva. Esso e' dato da:

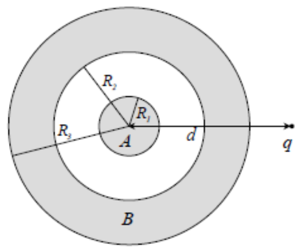
$$E_+ = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0}$$

Quindi:

$$F\left(-\right) = \sigma_- A E_+ = \sigma_- A \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0}$$
$$\rightarrow \left|F\left(-\right)\right| = \frac{\sigma^2 A}{2\varepsilon_0}$$

Sull'armatura positiva si esercita una forza uguale e opposta.

6. Un conduttore cilindrico di raggio $R_1 = 0.5\ cm$ e altezza $h = 1\ m$ si trova all'interno di uno strato conduttore cilindrico di raggi interno $R_2 = 2\ cm$ ed esterno $R_3 = 3\ cm$,di uguale altezza h. Il conduttore A ha una carica totale $Q_A = 4\ 10^{-9}\ C$ ed il conduttore B carica totale Q_B. Trovare:
   a) La differenza di potenziale fra i conduttori
   b) L'en. elettrostatica immagazzinata nello spazio fra i conduttori
   c) La carica Q_e sulla superficie esterna del conduttore B, sapendo che il lavoro necessario ad allontanare di un tratto $\delta = 10^{-3}\ cm$ una carica $q = 3\ 10^{-12}\ C$ posta a distanza $d = 10\ cm$ dall'asse dei cilindri vale $W = 6\ 10^{-14}\ J$
   d) La carica totale Q_B sul conduttore B



Carica indotta sulla sup. interna di B: $-Q_A$

Cap. cilindrica:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

$$\rightarrow \Delta V = \frac{Q_A}{C} = \frac{Q_A}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{R_2}{R_1} \approx 100\ V$$

En. immagazzinata nella capacita':

$$U_E = \frac{Q_A^2}{2C} \approx 2 10^{-7}\ J$$

Carica su sup. esterna di B: Q_e

C. elettrico esterno:

$$E_e = \frac{Q_e}{2\pi\varepsilon_0 hr}$$

$$\rightarrow V(r_2) - V(r_1) = \frac{Q_e}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$\rightarrow$ Lavoro della forza esterna che sposta q:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F}_{ext} \cdot d\mathbf{r} = -\int_d^{d+\delta} q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -q\int_d^{d+\delta} Edr = -\frac{qQ_e}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{d+\delta}{d} \approx -\frac{qQ_e}{2\pi\varepsilon_0 h}\frac{\delta}{d}, \frac{\delta}{d} \ll 1$$

$$\rightarrow Q_e = -W\frac{2\pi\varepsilon_0 hd}{q\delta} \approx -1.1 10^{-8} C$$

$$Q_B = Q_e - Q_A \approx -1.5 10^{-8} C$$

7. Fra le armature di un condensatore piano poste a una distanza d viene inserita una lastra metallica della stessa area e di spessore δ in posizione centrale. Come varia la capacita'?

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

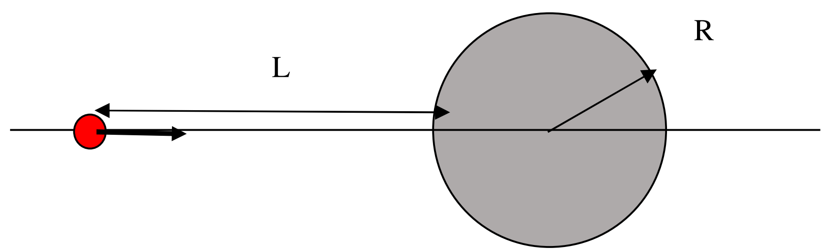
Dopo l'inserimento della lastra si ha l'equivalente di due capacita' uguali in serie

Per ognuna:

$$C' = \varepsilon_0 \frac{S}{\frac{d-\delta}{2}} = \varepsilon_0 \frac{2S}{d-\delta}$$

$$\to \frac{1}{C_{tot}} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{C'} = 2\frac{d-\delta}{\varepsilon_0 2S} = \frac{d-\delta}{\varepsilon_0 S} \to C_{tot} = \frac{\varepsilon_0 S}{d-\delta}$$

8. In una sfera di raggio $R = 10\ cm$ e' distribuita uniformemente una carica totale $Q = 10^{-8}\ C$. Una particella puntiforme di carica $q = 3\ 10^{-9}\ C$ e massa $m = 0.1\ g$ viene lanciata da una distanza $L = 4\ m$ dal bordo della sfera, lungo un asse che passa per il centro della sfera. Calcolare il valore minimo della velocita' iniziale della particella che garantisce l'attraversamento di tutta la sfera.



Cons. energia totale per la carica q: $E_k + U_E = \text{cost}$

$v_{\min}$: Corrisponde a $E_k = 0$ al centro della sfera; da quel punto in poi il c. elettrico spinge q fuori dalla sfera

$\rightarrow \frac{1}{2}mv_{\min}^2 = W_1 + W_2$, lavoro del c. elettrico su q fuori e dentro la sfera

$$W_1 = \Delta U_1 = U_1(R) - U_2(R+L) = q\left[V_1(R) - V_2(R+L)\right]$$

Assumendo $V(\infty) = 0$:

$$V_1(r) = -\int_{\infty}^{r} E_{ext}dr$$

$E_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, c. esterno = c. di una carica puntiforme Q

$$\rightarrow V_1(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\bigg|_{\infty}^{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\rightarrow \Delta U_1 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+L}\right)$$

$$W_2 = \Delta U_2 = U_2(0) - U_2(R) = q\left[V_2(0) - V_2(R)\right]$$

$$V_2(r) = -\int_{\infty}^{r} Edr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{R}\frac{dr}{r^2} - \int_{R}^{r} E_{\text{int}}(r)dr$$

$4\pi r^2 E_{\text{int}} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} = \frac{Q\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3\varepsilon_0} = \frac{Qr^3}{\varepsilon_0 R^3} \rightarrow E_{\text{int}} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$, Teo. di Gauss

$$\rightarrow V_2(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \int_{R}^{r}\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1 - \frac{r^2}{2R^2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$V_2(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right)$$

$$\rightarrow W_2 = \Delta U_2 = \frac{3}{2}\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{2}\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_{\min}^2 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+L}\right) + \frac{qQ}{2\,4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_{\min}^2 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+L} + \frac{1}{2R}\right) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{2R} - \frac{1}{R+L}\right)$$

$$\rightarrow v_{\min} \approx 0.28\ ms^{-1}$$