Esercizi 4 – Corrente, resistenza, fem, circuiti

1. Una rotaia del tram, di acciaio, e' lunga 11 km e ha una sezione trasversale di 56 cm^2. Se la resistivita' dell'acciaio e' 3.0 10^{-7} Ωm, qual e' la resistenza della rotaia?

   Usando la formula generale:

   $$R = \rho \frac{l}{A} \rightarrow R = 3.0 \ \ 10^{-7} \ \frac{11 \ 10^{3}}{56 \ 10^{-4}} \approx 0.6 \ \ \Omega$$

   Si puo' osservare che la resistenza della rotaia, per quanto limitata, e' tale da sconsigliare l'uso di un motore elettrico a bassa tensione e grande corrente per il tram. Infatti, p.es. una corrente di 100 A, necessariamente scaricata a terra attraverso le ruote+rotaie, porterebbe nel caso considerato a una differenza di potenziale ai capi della rotaia

   $$\Delta V = Ri = 0.6 \ \ 100 = 60 \text{ V}$$

   del tutto inaccettabile.

2. In un acceleratore di protoni si ha una ddp *ΔV = 600 kV*; l'intensita' del fascio corrisponde a una corrente *I = 1 mA*. Calcolare:
   a) Il n. di protoni che arrivano ogni secondo sul bersaglio
   b) La potenza spesa per accelerare i protoni
   c) La velocita' dei protoni quando urtano contro il bersaglio

   $$i = ne \rightarrow n = \frac{i}{e} = \frac{10^{-3}}{1.610^{-19}} \approx 6.710^{15} \ \ s^{-1}$$

   $$P = ne\Delta V = i\Delta V = 10^{-3} 600 \ 10^{3} = 600 \ \ W$$

   $$\frac{1}{2} mv^2 = e\Delta V \rightarrow v = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \ 1.6 \ 10^{-19} 600 \ 10^{3}}{1.6710^{-27}}} \approx 1.07 \ 10^{7} \ \ ms^{-1}$$

3. Una stufa elettrica, costituita da filo conduttore di resistenza totale *R = 20*Ω, deve dissipare una potenza *W=1.5 kW*. Si dispone di un generatore di tensione continua *V = 200V*: quale resistenza *r* si deve mettere in serie alla stufa?

   $$\begin{cases} V - ir = V' \\ V'i = W \end{cases} \rightarrow (V - ir)i = W \rightarrow Vi - W = i^2 r$$

   $$\rightarrow r = \frac{Vi - W}{i^2}$$

   $$i = \frac{V}{R+r} \rightarrow r = \frac{\frac{V^2}{R+r} - W}{\frac{V^2}{(R+r)^2}} = \frac{V^2 (R+r) - W (R+r)^2}{V^2} = (R+r) - (R+r)^2 \frac{W}{V^2}$$

   $$\rightarrow (R+r)^2 = R\frac{V^2}{W} \rightarrow R + r = V\sqrt{\frac{R}{W}}$$

   $$\rightarrow r = V\sqrt{\frac{R}{W}} - R = 200\sqrt{\frac{20}{1500}} - 20 \approx 3.1 \ \Omega$$

4. Un generatore di tensione di fem V e resistenza interna r viene chiuso su un filo di rame: se la temperatura del filo e' $T_1= 20\ ^0C$, la resistenza del filo e' $R_1 = 10\ \Omega$ e la corrente circolante e' i_1, mentre se la temperatura e' $T_2= 120\ ^0C$ la corrente risulta $i_2 = 0.75\ i_1$. .Sapendo che il coeff. di temperatura del rame e' $\alpha = 3.9\ 10^{-3}\ {}^0C^{-1}$, determinare r.

$$R_2 = R_1\left[1+\alpha\left(T_2-T_1\right)\right] \approx 10\ \left[1+3.910^{-3}\left(120-20\right)\right] \approx 10\left[1+0.39\right] \approx 13.9$$

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{R_1+r}{R_2+r} \to \frac{i_2}{i_1}\left(R_2+r\right) = R_1+r$$

$$\to r\left(1-\frac{i_2}{i_1}\right) = \frac{i_2}{i_1}R_2 - R_1$$

$$\to r = \frac{\frac{i_2}{i_1}R_2 - R_1}{1-\frac{i_2}{i_1}} = \frac{0.75\ 13.9\text{-}10}{0.25} \approx \frac{0.425}{0.25} = 1.7\ \Omega$$

5. Due conduttori R_1, R_2 posti in serie hanno resistenza totale $Rs=90\ \Omega$; posti in parallelo hanno invece resistenza totale $Rp=20\ \Omega$. Determinare il valore di R_1, R_2.

$$R_S = R_1 + R_2$$

$$R_P = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

$$\to R_1 = R_S - R_2$$

$$\to R_P = \frac{\left(R_S-R_2\right)R_2}{R_S}$$

$$\to R_PR_S = \left(R_S-R_2\right)R_2$$

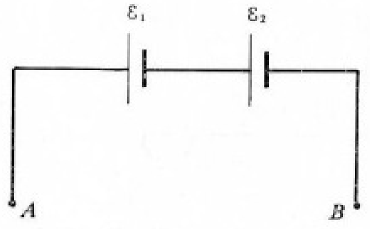
$$\to R_2^2 - R_SR_2 + R_PR_S = 0$$

$$\to R_2 = \frac{R_S \pm \sqrt{R_S^2-4R_PR_S}}{2} = \frac{R_S}{2}\left(1\pm\sqrt{1-4\frac{R_P}{R_S}}\right)$$

$$\to R_2 = 45\left(1\pm\sqrt{1-4\frac{20}{90}}\right) = 45\left(1\pm\sqrt{1-\frac{8}{9}}\right) = 45\left(1\pm\frac{1}{3}\right) = \begin{cases}30\ \Omega\\60\ \Omega\end{cases}$$

$$\to R_1 = \begin{cases}60\ \Omega\\30\ \Omega\end{cases}$$

6. Due batterie di fem $V_1 = 50\ V$ e $V_2 = 150\ V$ e resistenza interna $r_1 = 10\ \Omega$ e $r_2 = 40\ \Omega$, sono collegate in serie come nella figura:



a) Calcolare la tensione fra *A* e *B* a circuito aperto

Successivamente una resistenza *R* viene inserita fra *A* e *B*. Calcolare il valore di *R* per il quale e'max. :

b) La corrente in *R*

c) La ddp ai capi di *R*

d) La potenza dissipata in *R*

$$V_{AB} = V_1 + V_2 = 200\ V$$

$$i = \frac{V_1 + V_2}{r_1 + r_2 + R}$$

$$\rightarrow \frac{di}{dR} = -\frac{V_1 + V_2}{\left(r_1 + r_2 + R\right)^2} < 0 \rightarrow R\left(i_{\max}\right) = 0$$

$$V_R = iR = \frac{V_1 + V_2}{r_1 + r_2 + R} R$$

$$\rightarrow \frac{dV_R}{dR} = \frac{\left(V_1 + V_2\right)\left(r_1 + r_2 + R\right) - \left(V_1 + V_2\right)R}{\left(r_1 + r_2 + R\right)^2} = \frac{\left(V_1 + V_2\right)\left(r_1 + r_2\right)}{\left(r_1 + r_2 + R\right)^2} > 0$$

$$\rightarrow R\left(V_{R\max}\right) = \infty$$

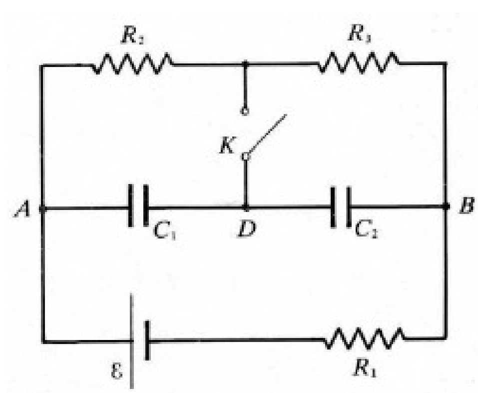
$$P_R = V_R i = \frac{V_1 + V_2}{r_1 + r_2 + R} R \frac{V_1 + V_2}{r_1 + r_2 + R} = \frac{\left(V_1 + V_2\right)^2}{\left(r_1 + r_2 + R\right)^2} R$$

$$\rightarrow \frac{dP_R}{dR} = \frac{\left(V_1 + V_2\right)^2 \left(r_1 + r_2 + R\right)^2 - \left(V_1 + V_2\right)^2 R2\left(r_1 + r_2 + R\right)}{\left(r_1 + r_2 + R\right)^4}$$

$$\rightarrow \frac{dP_R}{dR} = \left(V_1 + V_2\right)^2 \frac{\left(r_1 + r_2 + R\right) - 2R}{\left(r_1 + r_2 + R\right)^3} = \left(V_1 + V_2\right)^2 \frac{r_1 + r_2 - R}{\left(r_1 + r_2 + R\right)^3}$$

$$\rightarrow \frac{dP_R}{dR} = 0 \Leftrightarrow r_1 + r_2 - R = 0 \rightarrow R = r_1 + r_2$$

7. Nel circuito mostrato nella figura $E = 200V$, $R_1 = R_2 = 30\ \Omega$, $R_3 = 40\ \Omega$, $C_1 = 10\ \mu F$, $C_2 = 20\ \mu F$, calcolare le cariche q_1 e q_2 sui condensatori in condizioni di regime



a) Quando l'interruttore *K* e' aperto

b) Quando l'interruttore *K* e' chiuso

K aperto:

$$V_A = E,\quad V_B = E\frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$\rightarrow V_{AB} = E\left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3}\right) = E\frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$V_{AB} \equiv V_C, C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$\rightarrow Q = CV_C = E\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$\rightarrow Q = 200\frac{10\ 20\ 10^{-12}}{30\ 10^{-6}}\frac{30 + 40}{30 + 30 + 40} = \frac{200\ 200}{30}\frac{70}{100}10^{-6} \approx 0.93\ mC$$

K chiuso:

$$V_{C_1} = E\frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$V_{C_2} = E\frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$\rightarrow \begin{cases} Q_1 = C_1 V_{C_1} = EC_1\dfrac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\ Q_2 = C_1 V_{C_2} = EC_2\dfrac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} Q_1 = 200\ 10\ 10^{-6}\dfrac{30}{100} \approx 0.6\ mC \\ Q_2 = 200\ 20\ 10^{-6}\dfrac{40}{100} \approx 1.6\ mC \end{cases}$$