Esercizi 6 – Legge di Faraday

1. Si consideri una spira alla quale sia concatenato un flusso magnetico variabile nel tempo, il cui valore a due istanti *t=0* e *t* sia $\Phi(0), \Phi(t)$. Calcolare la carica totale che e' fluita nella resistenza R della spira fra *0* e *t*.

   Usiamo la legge dell'induzione di Faraday:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

   La corrente che circola nella spira sara'

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}$$
$$\rightarrow q = \int i dt = -\int_0^t \frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}dt = -\frac{\Delta\Phi}{R}$$

2. Si consideri una bacchetta conduttrice di lunghezza L, che viene spinta senza attrito su dei binari orizzontali conduttori a velocita' costante v. Nella regione e' presente un campo magnetico B, uniforme e verticale. Assumendo

   L=10.8 cm, v=4.86 ms^{-1}, B=1.18 T

   a) Determinare la f.e.m. indotta nella bacchetta

   Legge di Faraday: $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$; nel nostro caso

$$d\Phi = BLvdt$$
$$\rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = BLv$$
$$\rightarrow \mathcal{E} = -BLv = -0.62\,V$$

   b) Calcolare la corrente indotta, assumendo trascurabile la resistenza dei binari e uguale a 415 Ω quella della bacchetta

$$i = \frac{E}{R} = 1.49mA$$

   c) Che potenza viene dissipata nella bacchetta?

   Legge di Joule: $P = Ri^2 = 0.92mW$

d) Determinare la forza necessaria a mantenere la bacchetta in moto uniforme

Essendo la bacchetta percorsa da corrente in un campo magnetico esterno, su di essa agisce la forza

$$
\begin{aligned}
& d\mathbf{F} = id\mathbf{l} \times \mathbf{B} \rightarrow F = iLB \\
& \rightarrow F = \frac{BLv}{R} LB = (BL)^2 \frac{v}{R} = 0.19N
\end{aligned}
$$

La forza e' parallela alla velocita', e diretta in senso opposto; quindi per mantenere la bacchetta in moto uniforme occorre esercitare una forza compensatrice uguale e opposta a F

e) Calcolare la potenza meccanica sviluppata dalla forza esterna

$$
P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = (BL)^2 \frac{v}{R} v = \frac{\mathcal{E}^2}{R}
$$

Quindi la potenza meccanica e' interamente trasformata in calore Joule

3. La bacchetta dell'esercizio 2, che ha massa *m*, e' questa volta collegata ad un generatore di f.e.m. costante $\mathcal{E}$, senza che nessun'altra forza esterna intervenga

a) Verificare che la bacchetta tende ad una velocita' limite

Consideriamo la f.e.m. totale che agisce sul circuito equivalente bacchetta-binari:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{E}' = \mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt} \\
& \rightarrow i = \frac{\mathcal{E}'}{R} = \frac{\mathcal{E} - vBL}{R}
\end{aligned}
$$

La corrente da' luogo ad una forza motrice

$$
\begin{aligned}
& F = BiL = B\frac{\mathcal{E} - vBL}{R} L = \frac{B\mathcal{E}L}{R} - \frac{vB^2L^2}{R} \\
& \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{B\mathcal{E}L}{mR} - \frac{vB^2L^2}{mR}
\end{aligned}
$$

L'accelerazione si annulla (e quindi la velocita' resta costante) quando

$$
a = 0 \rightarrow \frac{B\mathcal{E}L}{mR} - \frac{vB^2L^2}{mR} = 0 \rightarrow v = \frac{\mathcal{E}}{BL}
$$

b) Qual e' la corrente nella bacchetta alla velocita' limite?

Sostituendo la velocita' limite nell'espressione della corrente, si trova i=0. Questa e' una conseguenza dell'aver trascurato ogni attrito.

4. La solita bacchetta si muove a velocita' costante su binari orizzontali, ma questa volta il campo magnetico non e' uniforme: in effetti, esso e' fornito da un filo parallelo ai binari, a distanza *a* dalla prima rotaia, percorso da una corrente i_1.
Assumendo:

$a=10.2\ mm,\ v=4.86\ ms^{-1},\ L=9.83\ cm,\ i_1=110\ A$

a) Calcolare la f.e.m. indotta nella bacchetta

Usando la legge di Faraday:

$$d^2\Phi = Bvdtdr \rightarrow \frac{d^2\Phi}{dt} = Bvdr$$

Il campo magnetico del filo e' dato da:

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

quindi il flusso totale e':

$$\frac{d^2\Phi}{dt} = Bvdr \rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \int_a^{a+L} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} vdr = \frac{\mu_0 i}{2\pi} v \int_a^{a+L} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 iv}{2\pi} ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$$
$$\rightarrow \mathcal{E} = -\frac{\mu_0 iv}{2\pi} ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$$

b) Il calcolo della corrente, potenza dissipata, etc procede esattamente come nei casi precedenti

5. Calcolare l'induttanza di due cilindri coassiali, di raggi a e b e di lunghezza l>>a,b, collegati insieme ad un estremo

Il campo magnetico e' diverso da zero solo nella zona fra i due cilindri (teorema di Ampere, usando come spira amperiana una circonferenza concentrica ai cilindri); in essa

$$\oint_C \mathbf{B} \bullet d\mathbf{s} = \mu_0 i \rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

con andamento tangenziale alla circonferenza. Il flusso di ***B*** si puo' calcolare in questo modo: si sceglie come elemento di superficie orientato una finestra con base *dr* a *r* e altezza *l*; allora:

$$d\Phi = \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = Bldr = \frac{\mu_0 il}{2\pi}\frac{dr}{r}$$

$$\rightarrow \Phi = \int_a^b d\Phi = \int_a^b \frac{\mu_0 il}{2\pi}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 il}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Dalla definizione di induttanza:

$$\Phi = Li \rightarrow L = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

L’approssimazione di l grande serve a trascurare gli effetti di bordo alle estremita’ dei cilindri

6. Si consideri un tratto di filo di rame (diametro = 2.5 mm; resistenza per unita’ di lunghezza = 3.3 Ω/km) percorso da una corrente di 10 A, distribuita in maniera uniforme.

   a. Calcolare la densita’ di energia elettrica alla superficie del filo

   Il campo elettrico nel filo e’:

$$j = \sigma E \rightarrow \frac{i}{A} = \sigma E$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

$$R = \rho\frac{l}{A} = \frac{l}{\sigma A} \rightarrow \frac{R}{l} = \frac{1}{\sigma A} \rightarrow \sigma = \frac{1}{A(R/l)}$$

$$\rightarrow \frac{i}{A} = \frac{1}{A(R/l)}E \rightarrow E = i\frac{R}{l}$$

   la densita’ di energia elettrica e’:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 i^2\left(\frac{R}{l}\right)^2 = 5.1\ 10^{-15} \quad Jm^{-3}$$

   b. Calcolare la densita’ di energia magnetica alla superficie del filo

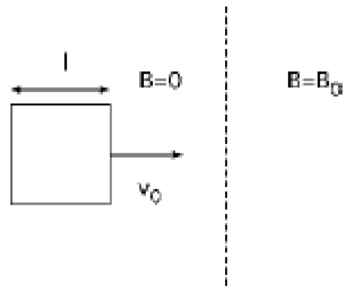
   Il campo magnetico e’:

$$B = \frac{\mu_o i}{2\pi r}$$

   La densita’ di energia magnetica

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\right)^2 = 1.02 \quad Jm^{-3}$$

7. Una spira quadrata di lato l e resistenza R viene lanciata su un piano orizzontale privo di attrito con velocita' iniziale v_0. A un certo punto entra in una zona nella quale e'presente un campo magnetico uniforme $\boldsymbol{B_0}$, perpendicolare al piano.



Calcolare la forza sulla spira da quando comincia a entrare nella zona in cui e'presente il campo magnetico

Nella spira viene generata una corrente autoindotta durante il transitorio
in cui si trova parzialmente entro il campo magnetico: infatti quando e'
tutta al di fuori o tutta all'interno del c.magnetico il flusso di $\mathbf{B}_0$ e' costante.
La corrente autoindotta origina una forza magnetica sul lato della spira immerso nel c.magnetico;

le forze magnetiche sui due lati paralleli alla velocita' sono uguali e opposte,quindi si annullano

$$F = ilB = \frac{lB}{R}\frac{d\Phi}{dt}$$

$\Phi = Blx$, x tratto del lato della spira all'interno del c. magnetico

$$\rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = Bl\frac{dx}{dt} = Blv$$

$$\rightarrow F = \frac{lB}{R}Blv = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

8. In un circuito RL alimentato da una batteria di fem V_0 e inizialmente aperto l'induttanza e' costituita da un solenoide di lunghezza l , fatto da N spire di area S. Al centro del solenoide e' presente una piccola spira aperta di area A, perpendicolare all'asse del solenoide. All'istante $t = 0$ l'interruttore in serie al solenoide viene chiuso. Calcolare la fem $v(t)$ ai capi della spira piccola

La spira piccola e' aperta $\rightarrow$ Non circola corrente $\rightarrow$ Non c'e' mutua induzione

$$i(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{NS\mu_0 ni}{i} = NS\mu_0 \frac{N}{l} = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$$

$$\rightarrow \tau = \frac{\mu_0 N^2 S}{lR}$$

$$\Phi_A = \mu_0 niA = \frac{\mu_0 NiA}{l} = \frac{\mu_0 NA}{l}\frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\rightarrow v(t) = -\frac{d\Phi_A}{dt} = \frac{\mu_0 NA}{l}\frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}\left(-\frac{1}{\tau}\right)$$

$$\rightarrow v(t) = -\frac{\mu_0 NA}{l}\frac{V_0}{R}\frac{lR}{\mu_0 N^2 S} e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{AV_0}{NS} e^{-\frac{t}{\tau}}$$