Esercizi 7 – Magnetismo nella materia

1. Un filo conduttore di raggio trascurabile, percorso da una corrente costante i, e' posto sull'asse di una guaina cilindrica di materiale magnetico, di raggio interno R_1 ed esterno R_2 e permeabilita' relativa μ_r. Determinare :

   a) L'andamento con r (distanza dal filo) di $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{M}$
   b) Le distribuzioni di corrente di magnetizzazione nella guaina

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s} = i_f, \quad \text{correnti libere; C circ. di raggio } r$$

$$\rightarrow 2\pi r H = i \rightarrow H = \frac{i}{2\pi r}, \text{ valida per ogni } r \text{ perche' } i = \text{unica corrente libera}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0\mu_r\mathbf{H}$$

$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}, & r < R_1 \\ \dfrac{\mu_0\mu_r i}{2\pi r}, & R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}, & r < R_1 \end{cases}$$

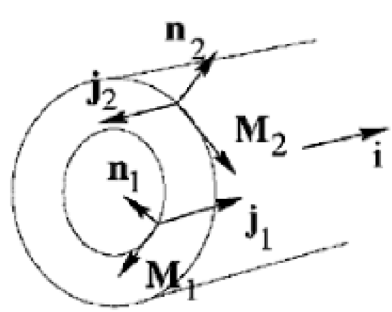
$$\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{H}+\mathbf{M}\right)$$

$$\rightarrow M = \frac{B}{\mu_0} - H$$

$$\begin{cases} M = \dfrac{(\mu_r - 1)\,i}{2\pi r}, & R_1 < r < R_2 \\ M = 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\rightarrow j_1 = M\left(R_1\right) = \frac{(\mu_r - 1)\,i}{2\pi r}, \quad \text{concorde a } i$$

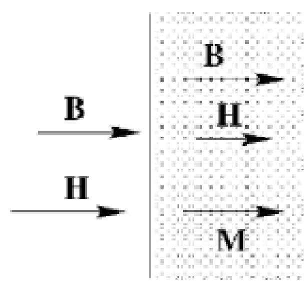
$$j_2 = M\left(R_2\right) = \frac{(\mu_r - 1)\,i}{2\pi r}, \quad \text{opposta a } i$$



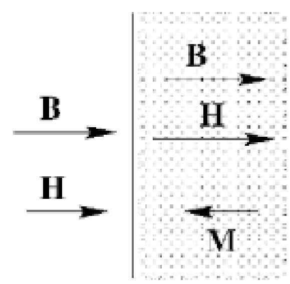
2. Una lastra indefinita e' posta ortogonalmente a un campo magnetico $\boldsymbol{B}$, uniforme. Determinare $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{M}$:

a) Nel caso in cui la lastra sia paramagnetica
b) Nel caso in cui sia diamagnetica

$$B_n^{vuoto} = B_n^{lastra} = B$$
$$\mu_r^{vuoto} H_n^{vuoto} = \mu_r H_n^{lastra}$$
$$\rightarrow H_n^{lastra} = \frac{1}{\mu_r} H_n^{vuoto}$$
$$H^{vuoto} = \frac{B}{\mu_0}$$
$$M = \chi_m H^{lastra} = \left(\mu_r - 1\right) H^{lastra} = H^{vuoto} - H^{lastra}$$
$$\mu_r > 1 \quad \text{(lastra paramagnetica)} \rightarrow H^{lastra} < H^{vuoto}$$
$$\mu_r < 1 \quad \text{(lastra diamagnetica)} \rightarrow H^{lastra} > H^{vuoto}$$



Para



Dia

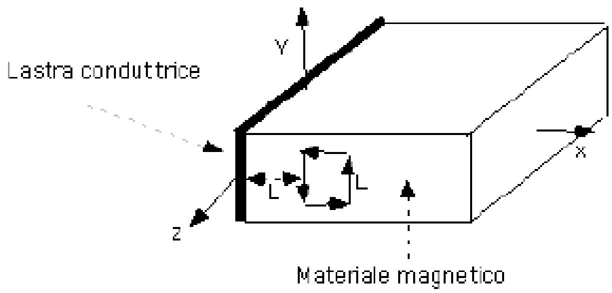
3. Una lastra conduttrice infinita e di spessore trascurabile, giacente nel piano *yz*, è percorsa da una corrente superficiale nella direzione dell'asse *z,* con densità lineare uniforme $J_i = 6.410^4$ A/m. Tutta la superficie della lastra è in contatto con un materiale magnetico di permeabilità relativa funzione di *x* secondo la legge $\mu_r(x) = 1 + ke^{-x/\lambda}$, $k = 87$, $\lambda = 32\ m$

   Determinare:

   a) Direzione e verso di **H**

   b) *B,H,M* nel materiale a distanza *L=25 cm* dalla lastra

   c) Le correnti di magnetizzazione di volume in funzione di *x* e di superficie per *x=0*



Corrente lungo $z \rightarrow$ Campo $\mathbf{H} \perp z$

Corrente distribuita lungo $y \rightarrow$ Campo $\mathbf{H} \parallel y$

Infatti:

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{id\mathbf{s}\times\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{j}dV\times\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi}\frac{jdydz\hat{\mathbf{k}}\times\left(x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}\right)}{r^3} = \frac{1}{4\pi}\frac{jdydz\left(x\hat{\mathbf{j}}-y\hat{\mathbf{i}}\right)}{r^3} =$$

$$\rightarrow \mathbf{H} = \frac{jx\hat{\mathbf{j}}}{4\pi}\iint\frac{dydz}{r^3} - \underbrace{\frac{j\hat{\mathbf{i}}}{4\pi}\iint\frac{ydydz}{r^3}}_{=0} = \frac{jx\hat{\mathbf{j}}}{4\pi}\iint\frac{dydz}{r^3}$$

Piano *yz* infinito $\rightarrow \mathbf{H} = H(x)\hat{\mathbf{j}}$

Teo. di Ampere: $\oint_\Gamma \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s} = i_\Gamma$

Se Γ = rettangolo (a,b) nel piano xy a cavallo di $x = 0 \rightarrow i_\Gamma = jb$

$$\rightarrow H_{vuoto}(x=-a/2)b + H_{mezzo}(x=+a/2)b = jb$$

$$\rightarrow 2H = j \rightarrow H = \frac{j}{2}\text{ , indipendente da } x$$

$$\rightarrow B = \mu_0\mu_r(x=L)H = \mu_0 k\left(1+e^{-L/\lambda}\right)j$$

$$\rightarrow M = \left[\mu_r(x=L)-1\right]H = \left[k\left(1+e^{-L/\lambda}\right)-1\right]j$$

$$\mathbf{j}_m = \mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}} \rightarrow j_m = M(x=0) = kj$$

$$\mathbf{j}_m = \nabla\times\mathbf{M} \rightarrow j_m = \frac{1}{2}\frac{d\mu_r}{dx}j = -\frac{kj}{2\lambda}e^{-x/\lambda}$$

4. Un elettromagnete è costituito da un toroide ferromagnetico circolare di permeabilità μr lunghezza media l e sezione circolare $S<<l^2$, e un traferro di spessore $d<<L$. Sul toroide sono avvolte N spire, nelle quali passa la corrente I. Nel traferro viene poi inserito un disco diamagnetico di suscettività χ_m. Calcolare:
   a) B,H,M nel toroide e nel traferro prima dell'introduzione del disco
   b) B,H,M nel toroide e nel traferro dopo l'introduzione del disco
   c) Le correnti di magnetizzazione nel toroide e nel disco

$$\oint_\Gamma \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s} = NI \rightarrow H_1 l + H_0 d = NI$$

$$B_1 = B_0 \equiv B \rightarrow B = \mu_0 H_0 = \mu_0 \mu_r H_1$$

$$\rightarrow \begin{cases} H_1 l + H_0 d = NI \\ H_0 = \mu_r H_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_0 = \dfrac{\mu_r NI}{\mu_r d + l} \\ H_1 = \dfrac{NI}{\mu_r d + l} \end{cases} \rightarrow M_1 = (\mu_r - 1) H_1 = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r d + l} NI$$

$$B = \mu_0 \mu_{dia} H_{dia} = \mu_0 \mu_r H_1$$

$$\rightarrow \begin{cases} H_1 l + H_{dia} d = NI \\ \mu_{dia} H_{dia} = \mu_r H_1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} H_{dia} = \dfrac{\mu_r NI}{\mu_{dia} l + \mu_r d} \\ H_1 = \dfrac{\mu_{dia} NI}{\mu_{dia} l + \mu_r d} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} M_1 = (\mu_r - 1) H_1 = \dfrac{(\mu_r - 1)\mu_{dia}}{\mu_{dia} l + \mu_r d} NI \\ M_{dia} = (\mu_{dia} - 1) H_{dia} = \dfrac{(\mu_{dia} - 1)\mu_r}{\mu_{dia} l + \mu_r d} NI \end{matrix}$$

$$i_M^{tor} = M_1 l = \frac{(\mu_r - 1)\mu_{dia}}{\mu_{dia} l + \mu_r d} NIl$$

$$i_M^{dis} = M_{dia} d = \frac{(\mu_{dia} - 1)\mu_r}{\mu_{dia} l + \mu_r d} NId$$

5. Un piccolo magnete permanente di forma cilindrica (raggio R, altezza h) e massa m, libero di scorrere lungo delle guide verticali, ha magnetizzazione uniforme $\boldsymbol{M}$, diretta verso il basso. Il sistema è immerso in un campo uniforme $\boldsymbol{B}$ diretto verso l'alto, il cui modulo varia con la quota secondo la legge $B(z)=a/(b+z)$.
Calcolare la quota alla quale la forza magnetica eguaglia la forza di gravità

$$\mathbf{F}_m = \boldsymbol{\mu} \cdot \nabla \mathbf{B}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{M}\pi R^2 h = -M\pi R^2 h\hat{\mathbf{k}}$$

$$\nabla \mathbf{B} = \frac{\partial B}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} = -\frac{a}{(b+z)^2}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\rightarrow F_m = \frac{aM\pi R^2 h}{(b+z)^2}$$

$$\frac{aM\pi R^2 h}{(b+z)^2} = mg$$

$$\rightarrow z = \sqrt{\frac{mg}{aM\pi R^2 h}} - b$$