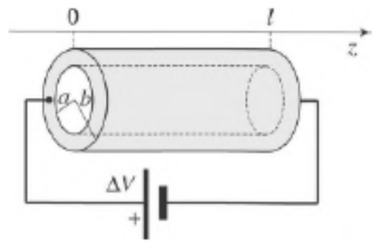
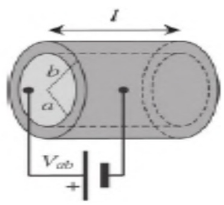
Calcolare la resistenza di un guscio cilindrico di resistivita' ρ, raggi a (interno) e b (esterno), e lunghezza l, nei due casi:

a) Corrente che entra e esce dalle basi



b) Corrente che entra dalla superficie interna ed esce da quella esterna



$$a)\ \ R = \rho \frac{l}{S} = \frac{\rho l}{\pi\left(b^2 - a^2\right)}$$

b) Resistenza equivalente = Res. serie di infiniti elementi infinitesimi

Elemento infinitesimo:

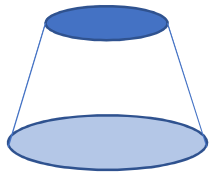
Area = Sup. laterale cilindro di raggio r

Lunghezza = Spessore dr

$$dR = \rho \frac{dl}{A} = \rho \frac{dr}{2\pi r l}$$

$$\rightarrow R = \int_a^b \rho \frac{dr}{2\pi r l} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Calcolare la resistenza di un tronco di cono retto, di raggi a e b $(a<b)$ e altezza d, e resistivita' ρ



$$r(z) = b - \frac{b-a}{d} z$$

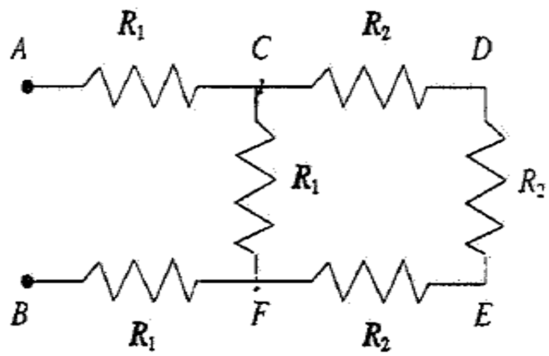
$$dR = \rho \frac{dz}{\pi r^2} = \rho \frac{dz}{\pi \left(b - \frac{b-a}{d} z \right)^2}$$

$$\rightarrow R = \int dR = \int_0^d \rho \frac{dz}{\pi \left(b - \frac{b-a}{d} z \right)^2} = \frac{\rho}{\pi b^2} \int_0^d \frac{dz}{\left[1 - \underbrace{\frac{1}{d}\left(1 - \frac{a}{b}\right)}_{k} z \right]^2} = \frac{\rho}{\pi b^2} \int_0^d \frac{dz}{[1-kz]^2}$$

$$\rightarrow R = \frac{\rho}{\pi b^2 k} \frac{1}{1-kz} \bigg|_0^d = \frac{\rho}{\pi b^2 k} \left(\frac{kd}{1-kd} \right) = \frac{\rho}{\pi b^2} \frac{d}{1-kd}$$

$$\rightarrow R = \frac{\rho}{\pi b^2} \frac{d}{1 - \frac{1}{d}\left(1 - \frac{a}{b}\right) d} = \frac{\rho}{\pi b^2} \frac{d}{1 - \left(1 - \frac{a}{b}\right)} = \frac{\rho}{\pi b^2} \frac{bd}{a} = \frac{\rho d}{\pi ab}$$

Dato il circuito:



R_1= 3 Ω, R_2 = 9 Ω

calcolare

a) La resistenza fra A e B
b) La corrente erogata da un generatore di fem = 17.4 V collegato fra A e B
c) La potenza erogata dal generatore

$$R = 2R_1 + R_1 \parallel 3R_2 = 2R_1 + \frac{3R_1R_2}{R_1 + 3R_2} = \frac{2R_1\left(R_1 + 3R_2\right) + 3R_1R_2}{R_1 + 3R_2}$$

$$\rightarrow R = \frac{2R_1^2 + 6R_1R_2 + 3R_1R_2}{R_1 + 3R_2} = \frac{2R_1^2 + 9R_1R_2}{R_1 + 3R_2} = 8.7\ \Omega$$

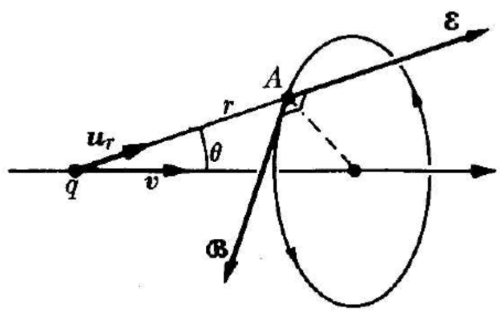
$$i = \frac{V}{R} = 2\ A$$

$$P = 17.4\ 2{=}34.8\ W$$

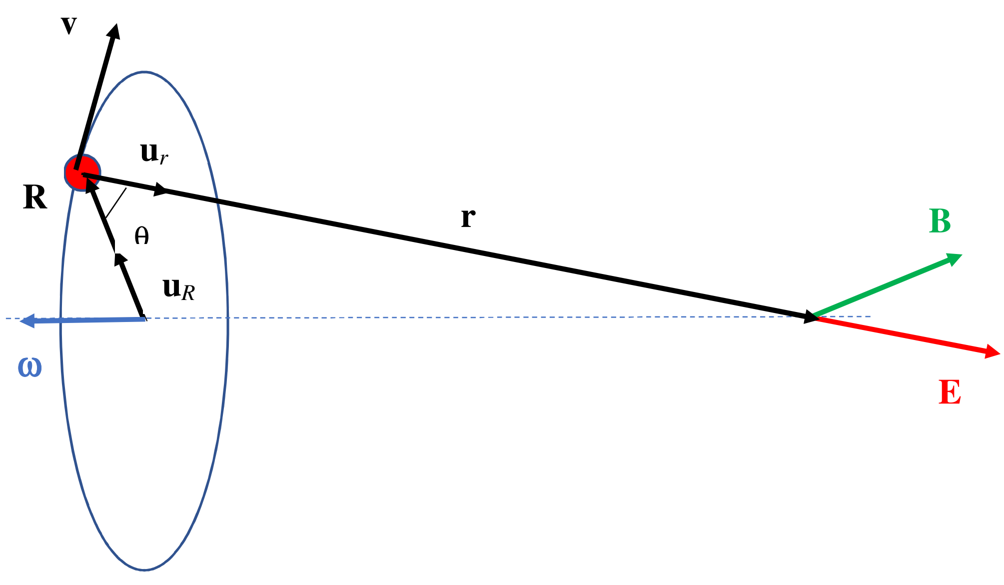
C. magnetico di una carica puntiforme in moto circolare uniforme, senza fare l'approssimazione della spira equivalente

C. magnetico di una carica in movimento :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{u}}_r}{r^2}$$



Assumendo che l'espressione sia valida anche per moto circolare
(in realta', come e' noto, moto accelerato: gli effetti di accelerazione,
che sono di natura radiativa, vengono trascurati):



$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$$

$$\rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \times \hat{\mathbf{u}}_r = -\frac{\mu_0 q}{4\pi R^2} \hat{\mathbf{u}}_r \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$$

$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$, ident. vettoriale

$$\rightarrow \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} \left[\boldsymbol{\omega} (\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \mathbf{R}) - \mathbf{R} (\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \boldsymbol{\omega}) \right]$$

$$\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \mathbf{R} = R \cos(\pi - \theta) = -R \cos\theta$$

$$\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \boldsymbol{\omega} = \omega \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \omega \sin\theta$$

$$\rightarrow \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} \left[-\boldsymbol{\omega} R \cos\theta - \mathbf{R} \omega \sin\theta \right]$$

$$\rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi R^2} \left[\omega R \cos\theta \hat{\mathbf{u}}_z + R\omega \sin\theta \hat{\mathbf{u}}_R \right]$$

$$\rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 q \omega R}{4\pi r^2} \left[\cos\theta \hat{\mathbf{u}}_z + \sin\theta \hat{\mathbf{u}}_R \right]$$

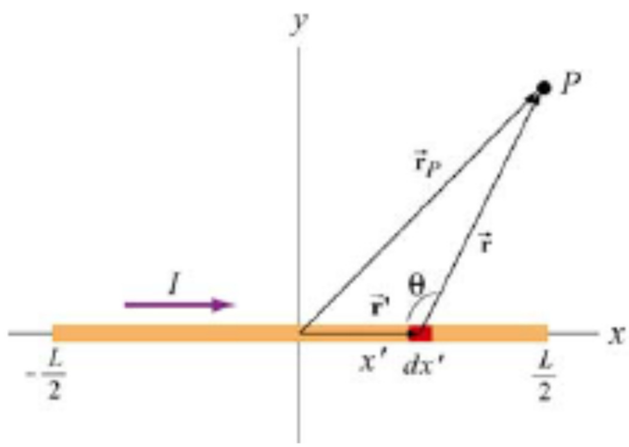
$$r^2 = R^2 + z^2$$

$$\cos\theta = \frac{R}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$\sin\theta = \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$\rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 q \omega R}{4\pi (R^2 + z^2)} \left[\frac{R}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \hat{\mathbf{u}}_z + \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \hat{\mathbf{u}}_R \right]$$

C. magnetico di un segmento finito di conduttore rettilineo percorso da corrente in un punto generico



Nel piano definito da segmento e punto P:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\mathbf{s}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad \text{Laplace I}$$

$$r = \left[(x-x')^2 + y^2\right]^{1/2}$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{(x-x')\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}}{\left[(x-x')^2 + y^2\right]^{1/2}}$$

$$d\mathbf{s} = dx'\hat{\mathbf{i}}$$

$$\rightarrow d\mathbf{s}\times\hat{\mathbf{r}} = dx'\hat{\mathbf{i}}\times\frac{(x-x')\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}}{\left[(x-x')^2 + y^2\right]^{1/2}} = \frac{ydx'\hat{\mathbf{k}}}{\left[(x-x')^2 + y^2\right]^{1/2}}$$

$$\rightarrow d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ydx'\hat{\mathbf{k}}}{\left[(x-x')^2 + y^2\right]^{1/2}}\frac{1}{\left[(x-x')^2 + y^2\right]} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ydx'\hat{\mathbf{k}}}{\left[(x-x')^2 + y^2\right]^{3/2}}$$

$$\rightarrow \mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{y\,dx'\hat{\mathbf{k}}}{\left[(x-x')^2+y^2\right]^{3/2}} = \frac{\mu_0 I y}{4\pi}\hat{\mathbf{k}} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{dx'}{\left[(x-x')^2+y^2\right]^{3/2}}$$

$$u = x - x' \rightarrow dx' = -du$$

$$\int \frac{dx'}{\left[(x-x')^2+y^2\right]^{3/2}} = -\int \frac{du}{\left[u^2+y^2\right]^{3/2}} = -\int \frac{du}{y^3\left[\frac{u^2}{y^2}+1\right]^{3/2}}$$

$$v = \frac{u}{y} \rightarrow du = y\,dv$$

$$-\int \frac{du}{y^3\left[\frac{u^2}{y^2}+1\right]^{3/2}} = -\int \frac{y\,dv}{y^3\left[v^2+1\right]^{3/2}} = -\frac{1}{y^2}\int \frac{dv}{\left[v^2+1\right]^{3/2}}$$

$$v = \tan\varphi \rightarrow dv = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{y^2}\int \frac{dv}{\left[v^2+1\right]^{3/2}} = -\frac{1}{y^2}\int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\left[\tan^2\varphi+1\right]^{3/2}} = -\frac{1}{y^2}\int \frac{\cos^3\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi} = -\frac{1}{y^2}\int \cos\varphi\, d\varphi$$

$$\rightarrow -\frac{1}{y^2}\int \frac{dv}{\left[v^2+1\right]^{3/2}} = -\frac{1}{y^2}\sin\varphi = -\frac{1}{y^2}\frac{v}{\left[v^2+1\right]^{1/2}} = -\frac{1}{y^2}\frac{\frac{u}{y}}{\left[\frac{u^2}{y^2}+1\right]^{1/2}} = -\frac{1}{y^2}\frac{u}{\left[u^2+y^2\right]^{1/2}}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{y^2}\frac{u}{\left[u^2+y^2\right]^{1/2}} = -\frac{1}{y^2}\frac{x-x'}{\left[(x-x')^2+y^2\right]^{1/2}}$$

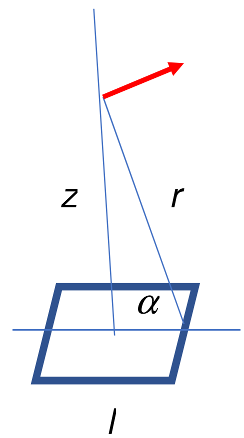
$$\rightarrow \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi y}\hat{\mathbf{k}} \left.\frac{x-x'}{\left[(x-x')^2+y^2\right]^{1/2}}\right|_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi y}\hat{\mathbf{k}}\left[\frac{x-\frac{L}{2}}{\left[\left(x-\frac{L}{2}\right)^2+y^2\right]^{1/2}} - \frac{x+\frac{L}{2}}{\left[\left(x+\frac{L}{2}\right)^2+y^2\right]^{1/2}}\right]$$

Casi limite:

a) $x = 0 \quad \rightarrow \dfrac{\mu_0 I}{4\pi y}\hat{\mathbf{k}}\left[\dfrac{L}{\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2+y^2\right]^{1/2}}\right] = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi y}\hat{\mathbf{k}}\dfrac{L}{L\left(\frac{1}{4}+\frac{y^2}{L^2}\right)^{1/2}} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi y}\dfrac{L}{\left(L^2+4y^2\right)^{1/2}}\hat{\mathbf{k}}$

b) $L \rightarrow \infty \quad \rightarrow \dfrac{\mu_0 I}{2\pi y}\hat{\mathbf{k}}$ Biot-Savart

Trovare il campo magnetico sull'asse di una spira quadrata di lato l percorsa da una corrente I



C. magnetico sull'asse (y) di un segmento di corrente l lungo x:

$$\mathbf{B}(y)=\frac{\mu_0 I}{2\pi y}\frac{l}{\left(l^2+4y^2\right)^{1/2}}\hat{\mathbf{k}}$$

Distanza punto sull'asse-centro di un lato:

$$r=\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2+z^2}$$

Angolo:

$$\cos\alpha=\frac{l}{2r}$$

Per motivi di simmetria, solo componente lungo z

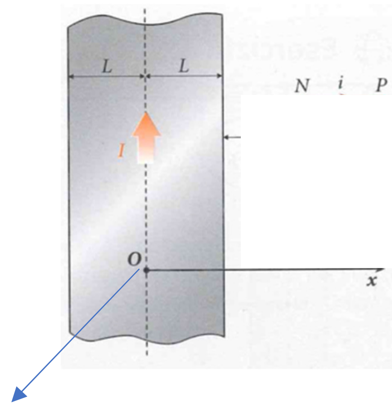
$$\rightarrow B_{1\ lato}=B_{segm}\cos\alpha=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{l}{\sqrt{l^2+4r^2}}\frac{l}{2r}=\frac{\mu_0 I l^2}{2\pi r}\frac{1}{2r\sqrt{l^2+4r^2}}$$

$$\rightarrow B_{spira}=\frac{\mu_0 I l^2}{\pi\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2+z^2\right]\sqrt{l^2+4\left(\frac{l}{2}\right)^2+4z^2}}$$

$$\rightarrow B_{spira}=\frac{4\mu_0 I l^2}{\pi\sqrt{2}\left[l^2+4z^2\right]\sqrt{l^2+2z^2}}=\frac{\mu_0 I}{2\pi l}\frac{4\sqrt{2}}{\left[1+4\left(\frac{z}{l}\right)^2\right]\sqrt{1+2\left(\frac{z}{l}\right)^2}}$$

$$\rightarrow B_{spira}(centro)=\frac{\mu_0 I}{2\pi l}4\sqrt{2}$$

Un nastro conduttore rettilineo molto lungo, di spessore trascurabile e larghezza *2L*, è percorso da una corrente stazionaria *I* uniformemente distribuita sulla sua sezione.



Ricavare l'espressione del campo magnetico generato dal nastro conduttore a distanza *-L<x<L* dal suo asse.

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi(x-u)},\ \text{contributo da striscia infinitesima a distanza } u \text{ da asse}$$

$$\text{con il segno } \begin{cases} - & \text{se } x>u \\ + & \text{se } x<u \end{cases} \rightarrow dB = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 dI}{2\pi(u-x)} & \text{se } u<x \\ -\dfrac{\mu_0 dI}{2\pi(u-x)} & \text{se } u>x \end{cases}$$

$$dI = \frac{I}{2L}du$$

$$\rightarrow B = \int_{-L}^{+L} \frac{\mu_0 I}{2\pi 2L(x-u)}du$$

$$\rightarrow B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi L}\left[\int_{-L}^{x}\frac{du}{(u-x)} + \int_{x}^{+L}\frac{du}{(u-x)}\right] = -\frac{\mu_0 I}{4\pi L}\left[\ln(u-x)\right]_{-L}^{x} + \left[\ln(u-x)\right]_{x}^{+L} = ???$$

L'integrale è divergente sull'intervallo considerato.

Tuttavia, introducendo una 'regolarizzazione' arbitraria degli integrali

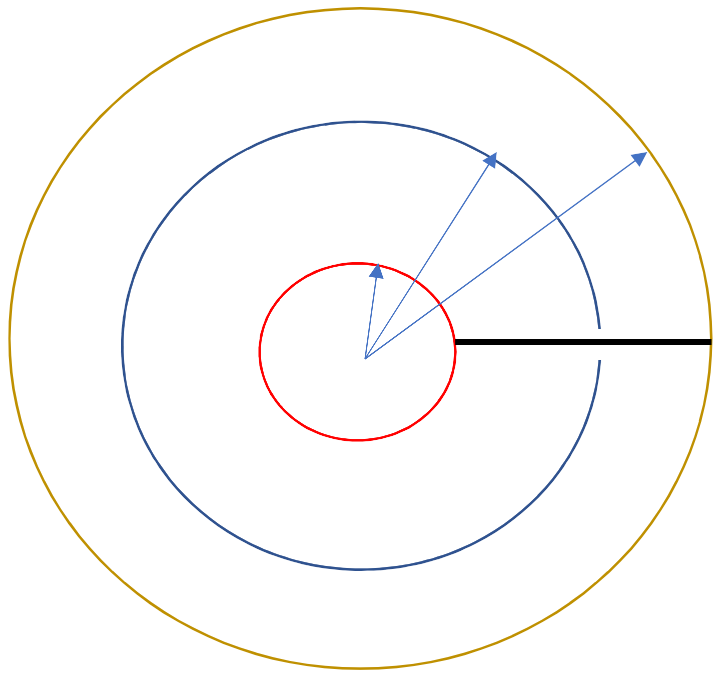
$$B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi L}\left[\int_{-L}^{x-\varepsilon}\frac{du}{u-x} + \int_{x+\varepsilon}^{L}\frac{du}{u-x}\right] = -\frac{\mu_0 I}{4\pi L}\left[\ln(u-x)\Big|_{-L}^{x-\varepsilon} + \ln(u-x)\Big|_{x+\varepsilon}^{+L}\right]$$

$$\rightarrow B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi L}\left(\ln\frac{-\varepsilon}{-L-x} + \ln\frac{L-x}{\varepsilon}\right) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi L}\left(\ln\frac{\varepsilon}{L+x} + \ln\frac{L-x}{\varepsilon}\right)$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi L}\ln\frac{L-x}{L+x}$$

I termini con ε si sottraggono nel risultato finale, che quindi è indipendente dal 'cutoff' ε

Un guscio sferico conduttore di raggio r_2 e' concentrico ad altri due gusci simili, di raggi $r_1<r_2$ e $r_3>r_2$, fra loro collegati da un filo conduttore isolato dal guscio intermedio.



Sul guscio di raggio r_2 viene depositata una carica q_2. Trovare la carica q_1 sul guscio di raggio r_1.

Carica q_2 genera un campo elettrico esterno, ma non interno

$\rightarrow$ Cariche indotte su 3, e su 1 che deve stare allo stesso potenziale di 3

Per la conservazione della carica:

$$q_1 + q_3 = 0 \rightarrow q_1 = -q_3$$

Campo nella I gap:

$$E_a = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Campo nella II gap:

$$E_b = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$V_{31} = -\int_{r_1}^{r_3} E dr = -\int_{r_1}^{r_2} E_a dr - \int_{r_2}^{r_3} E_b dr = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_2} - \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_1+q_2}{r_3} - \frac{q_1+q_2}{r_2}\right) = 0$$

$$\rightarrow q_1 = q_2 \frac{r_1}{r_2}\frac{r_3 - r_2}{r_1 - r_3}$$

Un condensatore piano con armature di area S separate da una distanza h, e' riempito con un dielettrico non omogeneo, la cui costante dielettrica varia linearmente da un'armatura all'altra secondo la legge

$$\varepsilon_r = 1 + ax, \quad 0 < x < h$$

Trovare la capacita' del condensatore

Capacita' equivalente strato generico di spessore Δx:

$$C(x) = \varepsilon_0 (1 + ax) \frac{S}{\Delta x}$$

$$\rightarrow A(x) = \frac{1}{C(x)} = \frac{\Delta x}{\varepsilon_0 S (1 + ax)}$$

$$\rightarrow dA = \frac{dx}{\varepsilon_0 S (1 + ax)}$$

Strati = capacita' in serie

$$\rightarrow \frac{1}{C_T} = \sum_i \frac{1}{C_i} \sim \int \frac{1}{C}$$

$$\rightarrow A_T = \frac{1}{C_T} = \int dA = \int_0^h \frac{dx}{\varepsilon_0 S (1 + ax)} = \frac{1}{\varepsilon_0 S a} \ln(1 + ax) \Big|_0^h$$

$$\rightarrow A_T = \frac{\ln(1 + ah)}{\varepsilon_0 S a}$$

$$\rightarrow C_T = \frac{\varepsilon_0 S a}{\ln(1 + ah)}$$

La bobina compatta 1 è composta da $N = 1000$ spire circolari di raggio $R_1 = 10\ cm$ Una seconda bobina 2, di raggio $R_2 = 5\ mm$ e stesso numero di spire, è posta nelle vicinanze del centro della prima bobina, in modo che l'angolo tra i versori normali alle due bobine sia α. Nella bobina *1* scorre la corrente $I = I_0\, sen\omega t$ con $I_0 = 4A,\ \omega = 3\ rad/s$ Determinare la f.e.m. indotta nella bobina 2 nel caso in cui (a) sia ferma ($\alpha = costante$), (b) ruoti con velocità angolare costante, tale che $\alpha(t) = \Omega t$, con $\Omega = 6\ rad/s$.

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1}$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 N I_1}{2R_1}$$

$$\rightarrow \Phi_{12} \approx \frac{\mu_0 N I_1}{2R_1} N\pi R_2^2 \cos\alpha$$

$$\rightarrow M = \frac{\mu_0 N N \pi R_2^2 \cos\alpha}{2R_1} = \frac{\mu_0 N^2 \pi R_2^2 \cos\alpha}{2R_1}$$

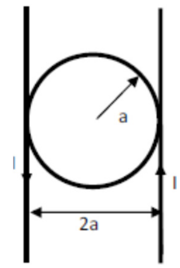
$$\rightarrow \varepsilon = -\frac{\mu_0 N^2 \pi R_2^2 \cos\alpha}{2R_1} I_0 \omega \cos\omega t, \quad \alpha \ \text{ costante}$$

$$\rightarrow \varepsilon = -M\frac{dI_1}{dt} - \frac{dM}{dt} I_1, \quad \alpha = \omega t$$

$$\rightarrow \varepsilon = -\frac{\mu_0 N^2 \pi R_2^2 \cos\Omega t}{2R_1} I_0 \omega \cos\omega t + \frac{\mu_0 N^2 \pi R_2^2 \Omega \sin\Omega t}{2R_1} I_0 \sin\omega t$$

$$\rightarrow \varepsilon = -\frac{\mu_0 N^2 \pi R_2^2}{2R_1} I_0 \left(\omega\cos\Omega t\cos\omega t - \Omega\sin\Omega t\sin\omega t\right)$$

Nei due conduttori di lunghezza indefinita, paralleli e separati dalla distanza *2a (a = 8cm),* scorre la medesima corrente *I = 10A*. Un anello circolare di materiale conduttore di raggio *a* giace nel piano dei due fili, tra di essi, ed è isolato da essi. Determinare il coefficiente di mutua induzione tra il conduttore circolare ed i due fili.



Ogni filo da' uguale contributo a $\Phi \rightarrow M = 2M\left(1 \text{ filo}\right)$

$$\Phi\left(1 filo\right) = \int_{\Sigma} \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = 2\int_0^{2a} B\left(x\right)y\left(x\right)dx,\ B\left(r\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\left(x-a\right)^2 + y^2 = a^2 \rightarrow y\left(x\right) = \pm\sqrt{a^2 - \left(x-a\right)^2}$$

$$\rightarrow \Phi = 2\int_0^{2a} B\left(x\right)y\left(x\right)dx = 2\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2a}\frac{1}{x}\sqrt{a^2-\left(x-a\right)^2}dx$$

$$\rightarrow \Phi = 2\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int_0^{2a}\frac{1}{x}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}-1\right)^2}dx$$

$$u = \frac{x}{a}-1 \rightarrow dx = adu$$

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}-1\right)^2}dx = a\int\frac{1}{au+a}\sqrt{1-u^2}du = \int\frac{1}{u+1}\sqrt{1-u^2}du = \int\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}du$$

$$u = \cos 2\theta \rightarrow \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}, du = -2\sin 2\theta d\theta$$

$$\rightarrow \int\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}du = -2\int\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}\sin 2\theta d\theta$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}, \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \rightarrow \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}} = \tan\theta$$

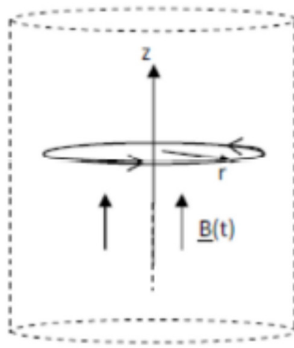
$$\rightarrow \int\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}\sin 2\theta d\theta = \int\tan\theta\sin 2\theta d\theta = \int 2\sin\theta\cos\theta\frac{\sin\theta}{\cos\theta}d\theta$$

$$\rightarrow 2\int\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}\sin 2\theta d\theta = 4\int\sin^2\theta d\theta = 2\theta - \sin 2\theta$$

$$\rightarrow -\left(\arccos u - \sqrt{1-u^2}\right)_{-1}^{1} = -\left(0-\pi-0+0\right) = \pi$$

$$\rightarrow \Phi\left(1 filo\right) = 2\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\pi = \frac{\mu_0 Ia}{2} \rightarrow \Phi = 2\mu_0 Ia \rightarrow M = 2\mu_0 a$$

Un campo magnetico uniforme, diretto come l'asse *z* e confinato in una regione cilindrica (*z* asse del cilindro), è caratterizzato da un modulo che diminuisce nel tempo con variazione costante pari a *1 mT/s*. Un elettrone si trova inizialmente fermo in un punto distante *1 cm* dall'asse del cilindro. Determinare la sua accelerazione istantanea, in modulo direzione e verso.



$$B(t) = B_0 - kt$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\rightarrow 2\pi r E = -\frac{d}{dt}\left(B\pi r^2\right) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} = -\pi r^2 k$$

$$\rightarrow 2\pi r E = -\pi r^2 k$$

$$\rightarrow E = -\frac{r}{2}k$$

$$\rightarrow F = -\frac{ekr}{2}$$

$$\rightarrow a = -\frac{ek}{2m} r \approx -8.810^5 \quad ms^{-2}$$

Una spira circolare di diametro D è fatta di un filo conduttore di raggio r, resistenza R e massa m. Essa viene lasciata cadere da una grande altezza z_0 all'istante $t = 0$ in una regione di spazio ove è presente un campo magnetico con componente $B_z = B_0(1 + kz)$ e z asse verticale. Nella caduta la spira mantiene sempre il suo asse verticale. Trascurando l'attrito dell'aria determinare:

(a) la velocità limite raggiunta nel suo moto di caduta;

(b) la potenza dissipata per effetto Joule nelle condizioni del punto (a),

(c) la forza elettromotrice nelle condizioni del punto (a).

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$S = \pi \frac{D^2}{4}$$

$$\Phi = B_0 (1 + kz) S$$

$$\rightarrow \varepsilon = -B_0 Sk \frac{dz}{dt} \rightarrow I = \frac{B_0 kSv}{R}$$

$$\rightarrow F_m = -\frac{d}{dz}(\mu B), \text{ forza magnetica frenante}$$

$$\rightarrow \text{Esiste vel. limite quando } \mathbf{F}_m = -m\mathbf{g}$$

$$\mu = IS = \rightarrow F_m = \frac{d}{dz}\left[\mu B_0 (1 + kz)\right] = \frac{d}{dz}\left[\frac{B_0 kSv}{R} SB_0 (1 + kz)\right] = \frac{B_0^2 kS^2}{R} \frac{d}{dz}\left[v(1 + kz)\right]$$

$$F_m = mg \rightarrow \frac{B_0^2 k^2 S^2 v_{\lim}}{R} = mg \rightarrow v_{\lim} = \frac{mgR}{B_0^2 k^2 S^2}$$

Alternativamente, in condizioni di velocita' limite = costante:

lavoro elementare f. di gravita' = en. elementare dissipata

$$\rightarrow mgdz = I^2 R dt$$

$$\rightarrow mg \frac{dz}{dt} = I^2 R \quad \rightarrow mgv_{\lim} = I^2 R$$

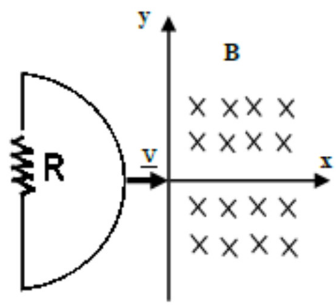
$$\rightarrow v_{\lim} = \frac{I^2 R}{mg} = \frac{\frac{B_0^2 S^2 k^2 v_{\lim}^2}{R^2} R}{mg} = \frac{B_0^2 S^2 k^2 v_{\lim}^2}{mgR}$$

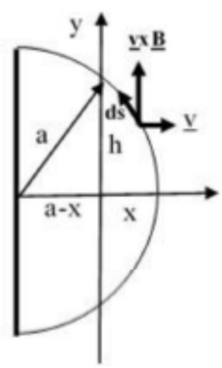
$$\rightarrow v_{\lim} = \frac{mgR}{B_0^2 S^2 k^2}$$

$$P = I^2 R = \frac{B_0^2 S^2 k^2 v_{\lim}^2}{R} = \frac{m^2 g^2 R}{B_0^2 S^2 k^2} = v_{\lim} mg$$

$$\varepsilon = -B_0 kSv_{\lim} = -\frac{mgR}{B_0 Sk}$$

La spira a forma semicircolare di figura ha resistenza elettrica $R = 40\ m\Omega$ e raggio $a = 10\ cm$. Traslando con velocità costante $v = 0.1\ cm/s$, all'istante $t = 0$ entra in una regione di campo magnetico uniforme e costante $B = 1.2T$ perpendicolare al piano della spira ed entrante come mostrato in figura. Determinare l'andamento della corrente che scorre nella spira nel tempo e la forza esterna che è necessario applicare alla spira per mantenere il moto a velocità costante.





$$\varepsilon = \oint_{spira} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\rightarrow \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = vBdy$$

$$\rightarrow \varepsilon = 2\int_0^h vBdy = 2vBh$$

$$h = \sqrt{a^2 - (a - vt)^2},\ \ 0 < vt < a$$

$$\rightarrow \varepsilon = 2vBh = 2vB\sqrt{a^2 - (a - vt)^2},\ 0 < t < t_{\max} = \frac{a}{v}$$

$$\rightarrow \varepsilon = 2v^2B\sqrt{\left(\frac{a}{v}\right)^2 - \left(\frac{a}{v} - t\right)^2} = 2v^2B\sqrt{t_{\max}^2 - (t_{\max} - t)^2} = 2v^2B\sqrt{2tt_{\max} - t^2}$$

$$\rightarrow I = \frac{2v^2B}{R}\sqrt{2tt_{\max} - t^2}$$

$$F_{ext} = \frac{P}{v} = \frac{I^2R}{v} = \frac{4v^3B^2}{R}\left(2tt_{\max} - t^2\right)$$

Una carica Q e' unformemente distribuita su una corona circolare di raggi a,b, che ruota attorno al suo asse con velocita' angolare costante ω.
Trovare il campo magnetico sui punti sull'asse della corona circolare.
C. magnetico di una spira di corrente:

$$B=\frac{\mu_0 i}{2}\frac{R^2}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$$

Corona circolare equivalente a insieme di spire, di raggio r e larghezza infinitesima dr:

$$dB=\frac{\mu_0\ di}{2}\frac{r^2}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}$$

di corrente elementare. Modi equivalenti di derivarla:

$$di=\frac{dQ}{T}=\frac{\sigma 2\pi r dr}{\frac{2\pi}{\omega}}=\sigma\omega r dr$$

$$di=jdA=\rho v dA=\rho\omega r dA=\rho\omega r s dr,\ s \text{ spessore disco (fittizio)}$$

$$\to di=\underbrace{\rho s}_{\sigma}\omega r dr=k\left(r\right)dr,\ k\left(r\right)\text{ dens. lineare di corrente}=\sigma\omega r$$

$$\to dB=\frac{\mu_0\sigma\omega r}{2}\frac{r^2}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}dr=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\frac{r^3}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}dr$$

$$\to B=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_a^b\frac{r^3}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}dr$$

$$\int\frac{r^3}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}dr=?$$

$$\begin{cases}u=r^2\\ dv=\dfrac{rdr}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}\end{cases}\to\begin{cases}du=2rdr\\ v=-\dfrac{1}{\left(z^2+r^2\right)^{1/2}}\end{cases}$$

$$\to\int\frac{r^3}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}dr=-\frac{r^2}{\left(z^2+r^2\right)^{1/2}}+\int\frac{2rdr}{\left(z^2+r^2\right)^{1/2}}=-\frac{r^2}{\left(z^2+r^2\right)^{1/2}}+2\left(z^2+r^2\right)^{1/2}$$

$$\to B=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_a^b\frac{r^3}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}dr=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\left[\frac{2\left(z^2+r^2\right)-r^2}{\left(z^2+r^2\right)^{1/2}}\right]_a^b=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\left[\frac{2z^2+r^2}{\left(z^2+r^2\right)^{1/2}}\right]_a^b$$

$$\to B=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\left[\frac{2z^2+b^2}{\left(z^2+b^2\right)^{1/2}}-\frac{2z^2+a^2}{\left(z^2+a^2\right)^{1/2}}\right]$$