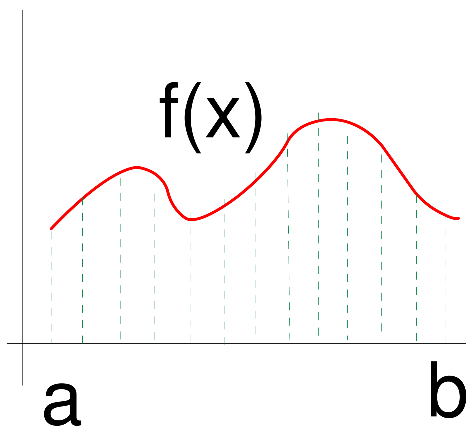
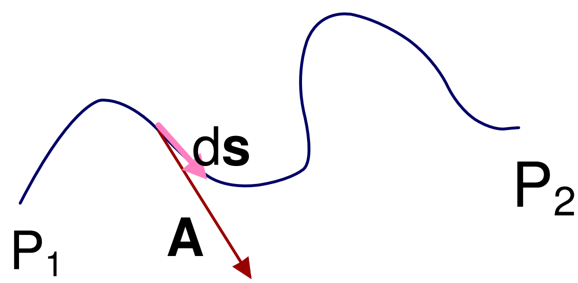
Integrali di linea, gradiente

Estensione dell'idea di integrale definito come somma:

da *funzione scalare* di una variabile, definita su un *intervallo*

a *funzione vettoriale* della posizione, definita su un *percorso*

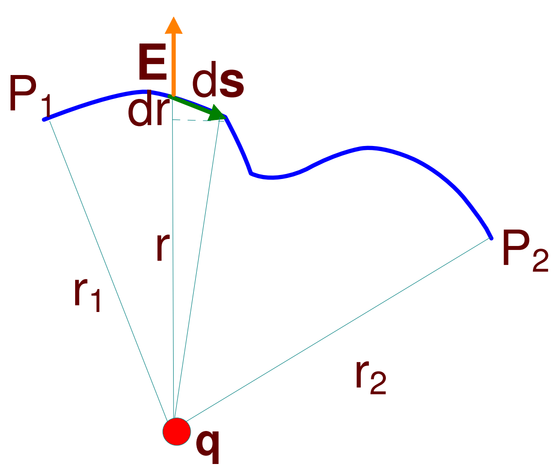




$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_i f(x_i)\Delta x \qquad \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} \approx \sum_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i)\cdot \Delta\mathbf{s}$$

dx: incremento elementare variabile indipendente
*d**s***: incremento elementare lungo un percorso (linea)

Lavoro: esempio noto di integrale di linea



$$L_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Es: Forza elettrostatica

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} \rightarrow L_{12} = Q\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = Q\int_{P_1}^{P_2} E\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s} = Q\int_{P_1}^{P_2} E dr$$

$$\rightarrow L_{12} = Q\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = Q\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)_{r_1}^{r_2} = Q\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$L_{12} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

q, Q stesso segno $\rightarrow$ forza *repulsiva* fra q e Q

Allora $\boldsymbol{F}$ e' concorde con $\Delta\boldsymbol{r}$:

$$\Delta r \underset{<}{\overset{>}{}} 0 \rightarrow L_{12} \underset{<}{\overset{>}{}} 0$$

Verifica:

$$\Delta r \underset{<}{\overset{>}{}} 0 \rightarrow \begin{array}{l} r_2 > r_1 \rightarrow \dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2} > 0 \rightarrow L_{12} > 0 \\ r_2 < r_1 \rightarrow \dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2} < 0 \rightarrow L_{12} < 0 \end{array} \quad \text{OK}$$

q, Q segno opposto $\rightarrow$ forza *attrattiva* fra q e Q

Allora $\boldsymbol{F}$ e' discorde con $\Delta\boldsymbol{r}$: OK

Relazione fra integrale definito e derivata:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$F(x) = \int f(x)dx \leftrightarrow f(x) = \frac{dF}{dx}$$

C'e' una relazione analoga fra integrale di linea e ...qualcosa?
Si', per i campi conservativi:

Esiste una funzione scalare U(r) della posizione t.c. l'integrale di linea della funzione vettoriale (tipicamente il lavoro di una forza) e' la differenza fra i valori di U nel punto finale e nel punto iniziale: U(r) = En. potenziale

$$L_{12} = -\Delta U_{12}$$

$$\rightarrow L_{12} \underset{<}{\overset{>}{}} 0 \rightarrow \Delta U_{12} \underset{>}{\overset{<}{}} 0$$

Verifica:

$$q, Q \text{ stesso segno: } L_{12} \underset{<}{\overset{>}{}} 0 \rightarrow \left(\text{vedi prima}\right) \Delta r \underset{<}{\overset{>}{}} 0 \rightarrow r_2 \underset{<}{\overset{>}{}} r_1$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \underset{>}{\overset{<}{}} 0 \rightarrow \Delta U_{12} \underset{>}{\overset{<}{}} 0 \qquad \text{OK}$$

q, Q segno opposto: stesse conclusioni

Quindi: per un campo vettoriale conservativo **E** la funzione U ha un significato simile a quello di primitiva di una funzione di x

Che cos'e' **E** in termini di U?

$$\int_{\gamma} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = V\left(P_2\right) - V\left(P_1\right)$$

$$\mathbf{E}\left(x, y, z\right) = ???\left(V\right)$$

Per ottenere **E** da V ci vuole una operazione analoga alla derivata

$$V\left(x, y, z\right) \rightarrow \mathbf{E}\left(x, y, z\right) \propto \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial V}{\partial z}$$

Gradiente: operazione che fa passare
funzione scalare $\rightarrow$ campo vettoriale

Significato geometrico:

vettore la cui direzione coincide punto per punto con quella della massima variazione per la funzione della posizione (x,y,z: 3 variabili); il suo modulo indica quanto e' grande la variazione stessa

Estensione dell'idea di derivata per funzioni di 3 variabili; si usano le derivate parziali

Simbolo speciale: Equivalente a un vettore

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

Definizione di c. elettrostatico:

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Quindi: vettore*scalare=vettore

Segno - ??

Si consideri la carica puntiforme:

Quando **E** e' in direzione uscente dalla carica, E diminuisce con r

Quando **E** e' in direzione entrante nella carica, E cresce con r

$\rightarrow$ Ci vuole il - !