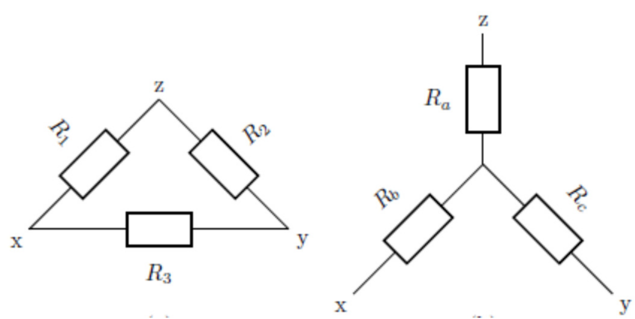
Equivalente di una rete di resistenze

Nel calcolo dell' equivalente di una data rete di resistenze, si usano prima di tutto le proprieta' delle resistenze in serie e in parallelo:

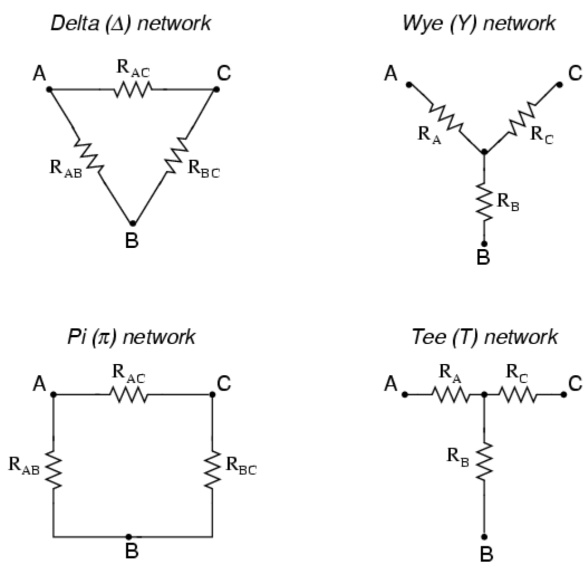
$$R_{serie} = \sum_i R_i$$

$$R_{par} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{R_i}}$$

Capita tuttavia di incontrare casi nei quali le regole di cui sopra non sono sufficienti, perche' la rete contiene interconnessioni che non consentono la riduzione immediata a uno dei due casi citati. In questi casi puo' essere usata l'equivalenza di due reti, dette rispettivamente a triangolo e a stella, che si deduce dalle proprieta' di serie e parallelo:



Altro modo di rappresentare la trasformazione:



Dimostrazione dell'equivalenza delle due reti

Fra due punti qualsiasi della prima rete si deve osservare la stessa resistenza totale nei due casi:

$$R_{xy} = R_3 \parallel \left(R_1 + R_2\right) = \frac{R_3\left(R_1 + R_2\right)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_b + R_c$$

$$R_{xz} = R_1 \parallel \left(R_2 + R_3\right) = \frac{R_1\left(R_2 + R_3\right)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_a + R_b$$

$$R_{yz} = R_2 \parallel \left(R_1 + R_3\right) = \frac{R_2\left(R_1 + R_3\right)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_a + R_c$$

Le tre relazioni consentono di esprimere $R_{a,b,c}$ in funzione di $R_{x,y,z}$ e viceversa:

$$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_a R_b = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{\left(R_1\right)^2 R_2 R_3}{\left(R_1 + R_2 + R_3\right)^2}$$

$$R_a R_c = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R_1 \left(R_2\right)^2 R_3}{\left(R_1 + R_2 + R_3\right)^2}$$

$$R_b R_c = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_2 \left(R_3\right)^2}{\left(R_1 + R_2 + R_3\right)^2}$$

$$\rightarrow R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c = \frac{R_1 R_2 R_3 \left(R_1 + R_2 + R_3\right)}{\left(R_1 + R_2 + R_3\right)^2} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

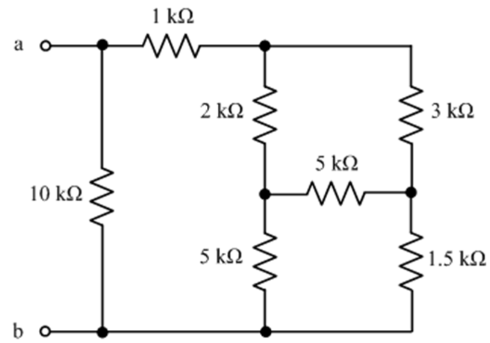
$$\rightarrow R_1 = \frac{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}{\underbrace{\frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}}_{R_c}} = \frac{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}{R_c}$$

$$\rightarrow R_2 = \frac{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}{\underbrace{\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}}_{R_b}} = \frac{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}{R_b}$$

$$\rightarrow R_3 = \frac{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}{\underbrace{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}}_{R_a}} = \frac{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}{R_a}$$

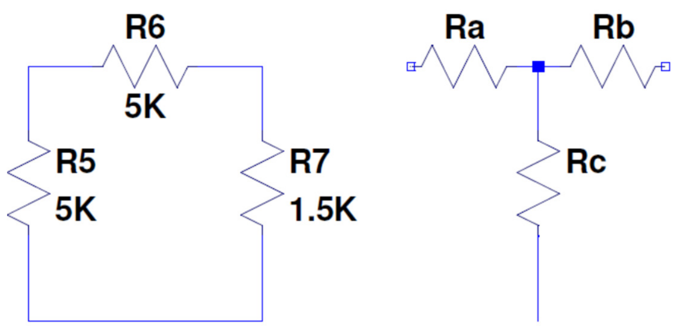
Quindi le due reti possono essere scambiate fra loro quando e' conveniente.

Esempi

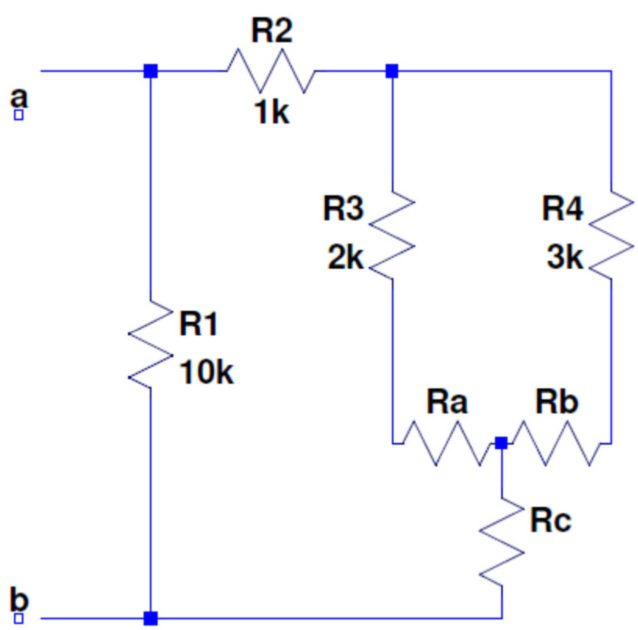


Trovare la resistenza fra *a* e *b*

Trasformazione $\pi - T$:

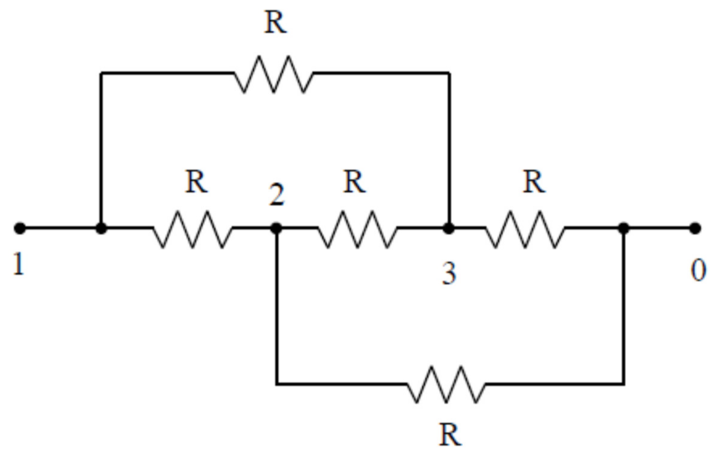


Quindi, circuito equivalente:



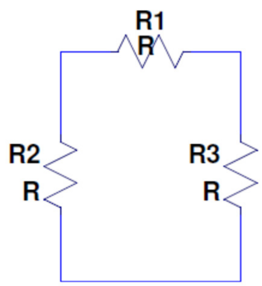
Quindi:

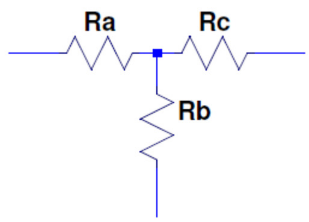
$$R_{ab} = R_1 \,||\, \left[R_2 + \left(R_3 + R_a \right) || \left(R_4 + R_b \right) + R_c \right]$$

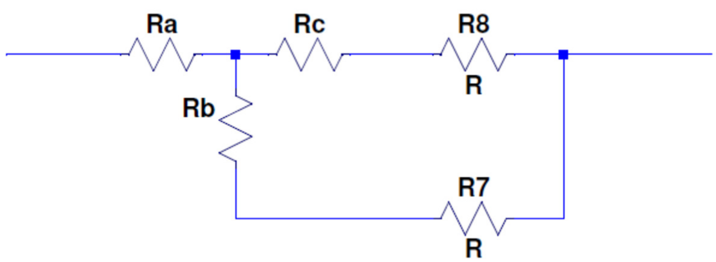


Trovare la resistenza equivalente fra 0 e 1

Riduzione triangolo:







$$R_{10} = R_a + (R_c + R_8) \,||\, (R_b + R_7)$$