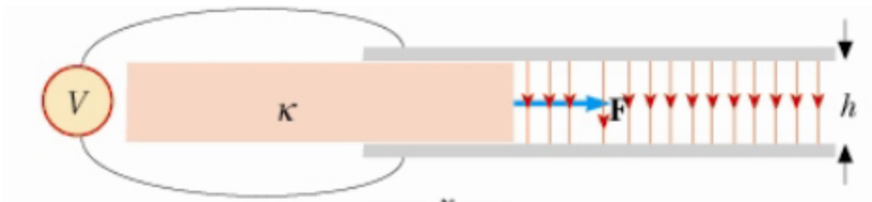
Forza di risucchio su un dielettrico o su un conduttore

vicini a un condensatore

1) Processo a potenziale costante

Un condensatore piano, privo di dielettrico, viene caricato da una batteria; lasciando la batteria collegata, una lastra dielettrica, avvicinata al bordo del condensatore, subisce una forza di risucchio verso l'interno del condensatore.



$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r l x}{h} + \frac{\varepsilon_0 l (l - x)}{h}$$

$$dC = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r l \, dx}{h} - \frac{\varepsilon_0 l dx}{h} = \frac{\varepsilon_0 l (\varepsilon_r - 1) dx}{h} > 0$$

$$U = \frac{1}{2} C V^2$$

$$\rightarrow dU = \frac{1}{2} V^2 dC > 0$$

Lavoro batteria:

$$dW = V dq$$

$$dq = V dC$$

$$\rightarrow dW = V^2 dC = 2dU, \quad ???$$

Sulla lastra si esercita una forza, dovuta al campo di bordo $\neq 0$, che agisce sulle cariche di polarizzazione sulla superficie del dielettrico:

$$dW_{lastra} = F dx$$

$$\rightarrow dW = dU + dW_{lastra}$$

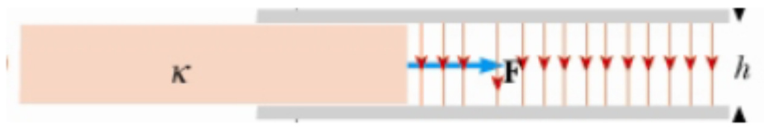
$$\rightarrow dW_{lastra} = dW - dU = \frac{1}{2} V^2 dC = \frac{1}{2} V^2 \frac{\varepsilon_0 l (\varepsilon_r - 1)}{h} dx$$

$$\rightarrow F = \frac{\varepsilon_0 l (\varepsilon_r - 1)}{2h} V^2$$

Se la lastra è libera, in assenza di attriti W_{lastra} si ritrova come en. cinetica della lastra; se una forza esterna trattiene la lastra dall'accelerare $W_{lastra} = -W_{ext}$

2) Processo a carica costante

Un condensatore piano, privo di dielettrico, viene caricato da una batteria, che poi viene scollegata; una lastra dielettrica, avvicinata al bordo del condensatore, subisce una forza di risucchio verso l'interno del condensatore.



$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r l x}{h} + \frac{\varepsilon_0 l (l-x)}{h}$$

$$dC = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r l\ dx}{h} - \frac{\varepsilon_0 l dx}{h} = \frac{\varepsilon_0 l (\varepsilon_r - 1) dx}{h} > 0$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$\rightarrow dU = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2} dC < 0$$

Sulla lastra si esercita una forza, dovuta al campo di bordo $\neq 0$, che agisce sulle cariche di polarizzazione sulla superficie del dielettrico:

$$dW_{lastra} = F dx$$

$$\rightarrow dW_{lastra} = -dU = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2} dC = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{\varepsilon_0 l (\varepsilon_r - 1)}{h} dx$$

$$\rightarrow F = \frac{\varepsilon_0 l (\varepsilon_r - 1)}{2h} \frac{Q^2}{\left[\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r l x}{h} + \frac{\varepsilon_0 l (l-x)}{h}\right]^2} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 h}{\varepsilon_0 l^2} \frac{(\varepsilon_r - 1)}{l\left[(\varepsilon_r - 1)\frac{x}{l} + 1\right]^2}$$

Se la lastra è libera, in assenza di attriti W_{lastra} si ritrova come en. cinetica della lastra; se una forza esterna trattiene la lastra dall'accelerare $W_{lastra} = -W_{ext}$

3) Forza su una lastra conduttrice

Un condensatore piano privo di dielettrico, con armature quadrate di lato L distanti $2b$, viene caricato da una batteria, che poi viene scollegata quando sulle armature c'è una carica Q ; una lastra conduttrice quadrata di lato L e spessore b, avvicinata al bordo del condensatore, subisce una forza di risucchio verso l'interno del condensatore.

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 Lx}{b} + \frac{\varepsilon_0 L(L-x)}{2b} = \frac{2\varepsilon_0 Lx + \varepsilon_0 L(L-x)}{2b} = \frac{\varepsilon_0 Lx + \varepsilon_0 L^2}{2b} = \frac{\varepsilon_0 L}{2b}(x+L)$$

$$dC = \frac{\varepsilon_0 L}{2b} dx$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\frac{\varepsilon_0 L}{2b}(x+L)} = \frac{Q^2 b}{\varepsilon_0 L(x+L)}$$

$$\rightarrow dU = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2} dC < 0$$

Sulla lastra si esercita una forza, dovuta al campo di bordo $\neq 0$, che agisce sulle cariche indotte sulla superficie della lastra stessa:

$$dW_{lastra} = Fdx$$

$$\rightarrow dW_{lastra} = -dU = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2} dC = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{\varepsilon_0 L}{2b} dx$$

$$\rightarrow F = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{\varepsilon_0 L}{2b} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\left[\frac{\varepsilon_0 L}{2b}(x+L)\right]^2}\frac{\varepsilon_0 L}{2b} = \frac{Q^2 b}{\varepsilon_0 L(x+L)^2}$$

Se la lastra è libera, in assenza di attriti W_{lastra} si ritrova come en. cinetica della lastra; se una forza esterna trattiene la lastra dall'accelerare $W_{lastra} = -W_{ext}$

Si noti che, così come presentata, l'espressione della capacità $C(x)$ è inadeguata a descrivere la capacità totale quando $x > L;$ l'espressione completa è:

$$C(x) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_0 L x}{b} + \dfrac{\varepsilon_0 L(L-x)}{2b} = \dfrac{\varepsilon_0 L}{2b}(x+L), & x < L \\ \dfrac{\varepsilon_0 L(x-L)}{2b} + \dfrac{\varepsilon_0 L\left[L-(x-L)\right]}{b} = \dfrac{\varepsilon_0 L}{2b}(3L-x), & x > L \end{cases}$$

Di conseguenza, anche l'espressione di $U(x)$ deve essere completata per descrivere correttamente la situazione quando $x > L$:

$$U(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\dfrac{\varepsilon_0 L}{2b}(3L-x)} = \frac{Q^2 b}{\varepsilon_0 L(3L-x)}, \quad x > L$$

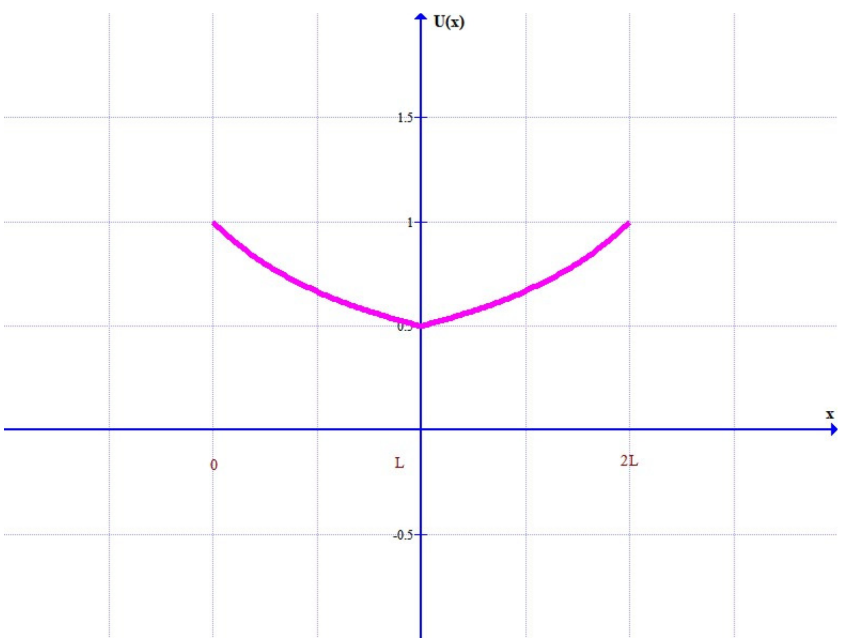
$$\rightarrow F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{Q^2 b}{\varepsilon_0 L(3L-x)^2}, \quad x > L$$

Si può osservare che

$$\lim_{x\to L^-} F = \frac{Q^2 b}{2\varepsilon_0 L^3}$$

$$\lim_{x\to L^+} F = -\frac{Q^2 b}{2\varepsilon_0 L^3}$$

Quindi F è discontinua per $x = L,$ come risultato dell'espressione dell'en. potenziale che presenta una cuspide, non fisica, per $x = L$ (v. figura), e quindi non è derivabile in quel punto



L'origine del problema sta nell'espressione di $C(x),$ che è solo approssimata perchè non considera gli effetti di bordo