Corso di Laurea in Fisica

A.A. 2016/17

Elettricita' e Magnetismo

Prova scritta – 02/12/2016

<u>Problema 1</u>

Un anello isolante di raggio $R=50\ cm$ e' carico uniformemente con densita' lineare di carica $\lambda=+2\ 10^{-9}\ Cm^{-1}$.

1. Qual e' la distanza dal centro dell'anello, lungo l'asse, alla quale il campo elettrico e' massimo?

Una carica puntiforme $-q$, con $q=10^{-10}\ C$, di massa $m = 10^{-10}\ g$, viene lasciata libera da ferma in un punto sull'asse dell'anello a distanza $a << R$ dal centro

2. Calcolare il periodo delle oscillazioni del moto della carica

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}$$

$$\rightarrow dE_{\parallel} = dE\cos\theta = dE\frac{z}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dqz}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dsz}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\rightarrow E_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda 2\pi Rz}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\lambda Rz}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{dE_{\parallel}}{dz} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\lambda R\left(R^2+z^2\right)^{3/2} - \lambda Rz\frac{3}{2}\left(R^2+z^2\right)^{1/2}2z}{\left(R^2+z^2\right)^3}$$

$$\frac{dE_{\parallel}}{dz} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}{\left(R^2+z^2\right)^3}\left[\left(R^2+z^2\right)-3z^2\right]$$

$$\rightarrow \frac{dE_{\parallel}}{dz} = 0 : \left[\left(R^2+z^2\right)-3z^2\right] = 0 \rightarrow z = \pm\frac{R}{\sqrt{2}} \approx \pm 0.5\cdot 0.707 \approx \pm 0.354\ m$$

$$E(z) = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\lambda R z}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \approx \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\lambda R z}{R^3} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0 R^2} z, \quad \text{campo per } |z| \ll R$$

$$\to F \approx -\frac{\lambda q}{2\varepsilon_0 R^2} z = ma = m\frac{d^2 z}{dt^2}$$

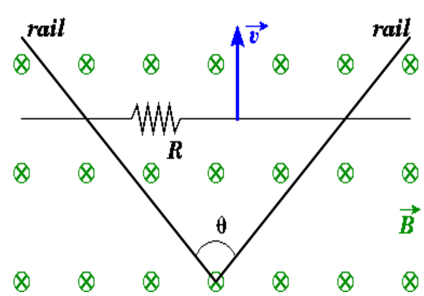
$$\to \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\lambda q}{2\varepsilon_0 m R^2} z = 0, \quad \text{eq. moto armonico}$$

$$\to \omega = \sqrt{\frac{\lambda q}{2\varepsilon_0 m R^2}} \approx \sqrt{\frac{2 10^{-9} 10^{-10}}{2 \cdot 8.85 10^{-12} 10^{-13} 0.25}} \approx \sqrt{\frac{2 10^{-19}}{4.42 10^{-25}}} \approx \sqrt{0.453 10^6} \approx 673 \; rads^{-1}$$

$$\to T = \frac{2\pi}{\omega} \approx \frac{6.28}{673} \approx 9.3 \; ms$$

Problema 2

Due rotaie metalliche, di resistenza trascurabile, sono disposte a forma di V, con angolo al vertice θ, in un piano orizzontale, ortogonale a un campo magnetico $\boldsymbol{B}$ uniforme e costante. Una sbarra conduttrice, in contatto con le rotaie e di resistenza efficace R, si muove con velocita' v costante, come in figura.



Trascurando l'autoinduzione:

1. Determinare la corrente indotta nel circuito
2. Determinare la forza necessaria a mantenere la sbarra in moto a velocita' costante

$$i = \frac{E}{R}$$

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dA}{dt} B$$

$$A = \frac{1}{2} bh, \quad h = vt, \quad b = 2h \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\rightarrow A = \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} 2vt \tan\frac{\theta}{2} vt = v^2 t^2 \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\rightarrow \frac{dA}{dt} = 2v^2 t \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\rightarrow E = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dA}{dt} B = -B 2v^2 t \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\rightarrow i = \frac{E}{R} = -\frac{2Bv^2}{R} \tan\frac{\theta}{2} t$$

$$F = iBl = -\frac{2B^2 v^2}{R} l \tan\frac{\theta}{2} t$$

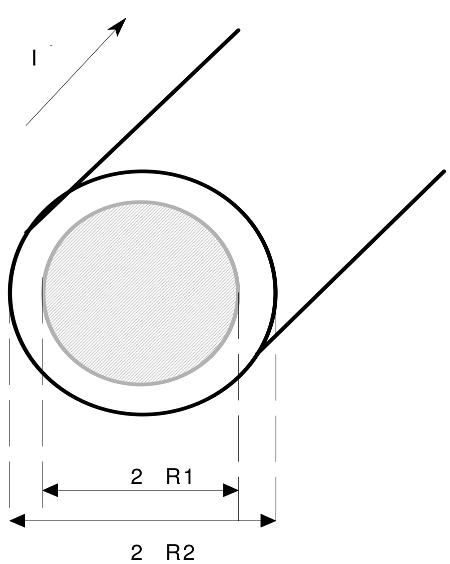
Assumendo che $l(t=0) = 0$

$$F = -\frac{4B^2 v^3 \tan^2 \frac{\theta}{2}}{R} t^2, \quad \text{forza magnetica sulla sbarra in moto}$$

$$\rightarrow F_{ext} = -F$$

<u>Problema 3</u>

Il conduttore cilindrico cavo rappresentato in figura e' attraversato da una corrente *I=10 A*, uniformemente distribuita sulla sezione trasversale a forma di corona circolare di raggi $R_1 = 15\ cm$ e $R_2 = 20\ cm$.



1. Calcolare il campo magnetico in funzione della distanza r dall'asse del sistema, per $0 \le r < \infty$
2. Calcolare la forza esercitata su un elettrone che si muove con velocita' $\mathbf{v} = 10^7$ ms^{-1} parallela all'asse del sistema, ad una distanza r dall'asse, distinguendo i casi $r<R_1$, $R_1<r<R_2$, $r>R_2$

$$j = \frac{I}{A} = \frac{I}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)}$$

$$\oint_{C_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad C_1 \text{ circ. di raggio } r < R_1$$

$$\to B = 0$$

$$\oint_{C_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 i(r), \quad C_2 \text{ circ. di raggio } R_1 < r < R_2$$

$$i(r) = j\pi\left(r^2 - R_1^2\right) = I\frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \to 2\pi r B = \mu_0 I \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$\to B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \approx \frac{4\pi 10^{-7} 10}{2\pi r}\frac{r^2 - 0.0225}{0.04 - 0.0225} \approx \frac{2 10^{-6}}{r}\frac{r^2 - 0.022}{0.017} \approx 0.114 10^{-3} \frac{r^2 - 0.022}{r} \; T$$

$$\oint_{C_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I, \quad C_2 \text{ circ. di raggio } r > R_2$$

$$\to B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \approx \frac{4\pi 10^{-7} 10}{2\pi r} \approx \frac{2 10^{-6}}{r} \; T$$

$$F = 0, \quad r < R_1$$

$$F = ev\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \approx 1.6 10^{-19} 10^7 \, 0.114 10^{-3} \frac{r^2 - 0.022}{r}$$

$$\to F \approx 0.183 10^{-15} \frac{r^2 - 0.022}{r} \; N, \; R_1 < r < R_2 \quad \text{radiale}$$

$$F = ev\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \approx 1.6 10^{-19} 10^7 \frac{2 10^{-6}}{r} \approx \frac{3.2 10^{-18}}{r} \; N, \; r > R_2 \quad \text{radiale}$$