Corso di Laurea in Fisica

A.A. 2017/18

Elettricita' e Magnetismo

Prova scritta – 03/12/2018

Problema 1

Due condensatori uguali a facce piane parallele a distanza δ l'una dall'altra, di capacita' C e con il vuoto tra le armature sono collegati in parallelo. Inizialmente l'armatura superiore di ciascun condensatore ha carica $+Q_0$ ed il sistema e' isolato. A partire da questa condizione, mantenendo isolato il sistema, in uno dei condensatori viene inserita una lastra di materiale isolante omogeneo ed isotropo, di costante dielettrica relativa ε_r che riempie completamente lo spazio tra le armature.
Nella situazione finale determinare le espressioni:

1. Della carica finale sulle armature dei condensatori
2. Dei campi elettrici E_1 ed E_2 fra le armature
3. Della variazione di energia elettrostatica del sistema nel passare dalla situazione iniziale a quella finale.

$$C_{in} = 2C$$

$$C_{fin} = C + C' = C + C\varepsilon_r = C(1+\varepsilon_r)$$

$$Q_1 + Q_2 = 2Q_0,\ Q_1 = CV_{fin},\ Q_2 = C'V_{fin}$$

$$\rightarrow C(1+\varepsilon_r)V_{fin} = 2Q_0 \rightarrow V_{fin} = \frac{2Q_0}{C(1+\varepsilon_r)}$$

$$\rightarrow Q_1 = CV_{fin} = C\frac{2Q_0}{C(1+\varepsilon_r)} = \frac{2Q_0}{1+\varepsilon_r}$$

$$\rightarrow Q_2 = C'V_{fin} = \varepsilon_r C\frac{2Q_0}{C(1+\varepsilon_r)} = \frac{2Q_0\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}$$

$$E_1 = E_2 = \frac{V_{fin}}{\delta} = \frac{2Q_0}{C(1+\varepsilon_r)\delta}$$

$$\Delta U_e = U_{fin} - U_{in} = \frac{1}{2}(C+C')V_{fin}^2 - 2\frac{Q_0^2}{2C}$$

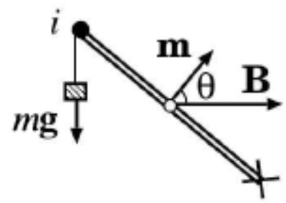
$$\rightarrow \Delta U_e = \frac{1}{2}C(1+\varepsilon_r)\frac{4Q_0^2}{C^2(1+\varepsilon_r)^2} - \frac{Q_0^2}{C} = \frac{2Q_0^2}{C(1+\varepsilon_r)} - \frac{Q_0^2}{C} = \frac{Q_0^2}{C}\left(\frac{2}{1+\varepsilon_r} - 1\right)$$

$$\rightarrow \Delta U_e = \frac{Q_0^2}{C}\frac{1-\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}$$

Problema 2

Una spira quadrata di lato $a = 10\ cm$ puo' ruotare attorno al suo asse orizzontale ed e' percorsa da una corrente $i = 5\ A$. nella regione considerata e' presente un campo magnetico $B = 1\ T$, uniforme, diretto orizzontalmente e perpendicolare all'asse di rotazione. Ad un estremo della spira e' appesa una massa m.

1. Stabilire il massimo valore della massa m_{max} che la spira puo' sollevare
2. Calcolare il lavoro meccanico compiuto dalla forza magnetica, con la massa uguale a m_{max}, quando la spira ruota dalla posizione orizzontale a quella verticale



$$\boldsymbol{\tau}_m = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$

$$\boldsymbol{\mu} = ia^2\hat{\mathbf{n}},\ \hat{\mathbf{n}} \text{ versore } \perp \text{ spira}$$

$$\rightarrow \tau_m = Bia^2 \sin\theta,\ \theta \text{ angolo fra } \hat{\mathbf{n}} \text{ e } \mathbf{B}$$

$$\tau_g = mg\frac{a}{2}\sin\theta$$

$$\rightarrow Bia^2 \sin\theta \geq mg\frac{a}{2}\sin\theta$$

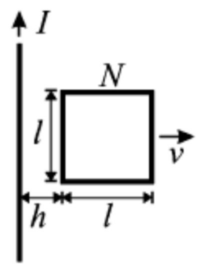
$$\rightarrow Bia \geq \frac{mg}{2} \rightarrow m \leq m_{\max} = \frac{2Bia}{g} = \frac{2\ 1\ 5\ 0.1}{9.81} \approx 0.11\ kg$$

$$W = \Delta U_g = \frac{m_{\max}ga}{2} = \frac{2Bia}{g}\frac{ga}{2} = Bia^2 = 1\ 5\ 0.01 \approx 0.05\ \text{J}$$

Problema 3

Una bobina di resistenza R, composta da N spire quadrate di lato l, si trova ad una distanza h da un filo rettilineo indefinito, complanare alla spira e percorso da una corrente costante I. Determinare:

1. La forza da applicare per allontanare la bobina con velocita' costante v
2. Il momento di dipolo magnetico della bobina nelle condizioni della domanda 1.



$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$v = \frac{dh}{dt}$$

$$\rightarrow \Phi(B) = N \int_{\Sigma} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 N I l}{2\pi} \ln \frac{h+l}{h}$$

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(B)}{dh} \frac{dh}{dt} = -\frac{\mu_0 N I l}{2\pi R} \frac{h}{h+l} \frac{h-(h+l)}{h^2} v$$

$$\rightarrow i = \frac{\mu_0 N I l^2 v}{2\pi R h(h+l)}$$

$\mathbf{F} = i\mathbf{l} \times \mathbf{B}$, sui 4 lati della spira

Forze sui lati orizzontali: uguali e opposte

Forze sui lati verticali: opposte, modulo diverso

$$\rightarrow F = F' - F'' = -il \frac{\mu_0 N I}{2\pi h} + il \frac{\mu_0 N I}{2\pi(h+l)}, \text{ verso il filo}$$

$$\rightarrow F_{ext} = il \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h+l} \right) = l \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \frac{\mu_0 N I l^2 v}{2\pi R h(h+l)} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h+l} \right)$$

$$\rightarrow F_{ext} = \frac{\mu_0^2 N^2 I^2 l^4 v}{(2\pi)^2 R h^2 (h+l)^2}$$

$$\mu = Nil^2 = \frac{\mu_0 N^2 I l^4 v}{2\pi R h(h+l)}$$
