Corso di Laurea in Fisica

A.A. 2017/18

Elettricita' e Magnetismo

Prova scritta – 04/12/2017

Problema 1

Una lastra non conduttrice e' limitata da due piani infiniti, posizionati parallelamente l'uno all'altro, e al piano *xy*, alle quote $z=+t/2$ e $z=-t/2$. La lastra contiene una densita' uniforme di carica elettrica di valore ρ.

1. Trovare il valore del campo elettrico sopra e sotto la lastra
2. Trovare il valore del campo elettrico all'interno della lastra, ad una quota generica $-t/2<z<+t/2$

C. elettrico $\parallel z$ per simmetria

$\rightarrow$ Per sup. gaussiana cilindrica attraverso le 2 superficie:

$$\Phi(E) = 2\pi r^2 E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\pi r^2 t$$

$$\rightarrow E = \begin{cases} +\dfrac{\rho t}{2\varepsilon_0}, & z > +\dfrac{t}{2} \\ -\dfrac{\rho t}{2\varepsilon_0}, & z < -\dfrac{t}{2} \end{cases}$$

$\rightarrow$ Per sup. gaussiana cilindrica entro le 2 superficie, fra $-z$ e $+z$:

$$\Phi(E) = 2\pi r^2 E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\pi r^2 2z$$

$$\rightarrow E = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}$$

Problema 2

Un filo rettilineo, a sezione circolare di raggio $a = 1\ mm$ e di permeabilita' magnetica relativa $\mu_r=1$, trasporta una corrente $I = 1\ A$ continua, uniformemente distribuita su tutta la sezione del filo

1. Qual e' la densita' di energia del campo magnetico dentro il filo?
2. Qual e' l'energia magnetostatica per unita' di lunghezza dentro il filo?

r dist. radiale dall' asse entro il filo

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 i = \mu_0 j \pi r^2$$

$$j = \frac{i}{\pi a^2}$$

$$\rightarrow B 2\pi r = \mu_0 \frac{i}{\pi a^2} \pi r^2$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a^2} r$$

$$\rightarrow u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 a^4} r^2$$

$$\frac{dU_B}{dz} = \iint u_B r dr d\varphi = \iint \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 a^4} r^2 r dr d\varphi$$

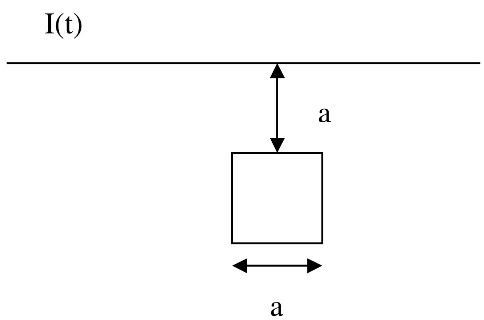
$$\rightarrow \frac{dU_B}{dz} = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 a^4} 2\pi \int_0^a r^3 dr = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi a^4} \frac{a^4}{4} = \frac{\mu_0 i^2}{16\pi} \approx \frac{4\pi 10^{-7}}{16\pi} = 2.5 10^{-8}\ Jm^{-3}$$

Problema 3

Un filo rettilineo indefinito e'percorso dalla corrente alternata

$$I(t) = I_0 \sin \omega t$$

Una spira quadrata, di lato *a* e resistenza *R*, e' posta rispetto al filo come in figura:



1. Calcolare la corrente indotta nella spira
2. Trovare l'energia dissipata nella spira in un ciclo

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = \iint_{spira} B d\Sigma = a\int_a^{2a} B(r)dr$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}$$

$$\rightarrow \Phi = a\int_a^{2a} B(r)dr = a\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi}\int_a^{2a}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} a \ln 2$$

$$\rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 a \ln 2 I_0}{2\pi R}\sin \omega t$$

$$\rightarrow i(t) = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 \omega a \ln 2 I_0}{2\pi R}\cos \omega t$$

$$E = \int_0^T P(t)dt = \int_0^T R i^2 dt = \left(\frac{\mu_0 \omega a \ln 2 I_0}{2\pi R}\right)^2 R\int_0^T \cos^2 \omega t dt$$

$$\int_0^T \cos^2 \omega t dt = T\left\langle \cos^2 \omega t \right\rangle = \frac{T}{2}$$

$$\rightarrow E = \left(\frac{\mu_0 \omega a \ln 2 I_0}{2\pi R}\right)^2 R\frac{T}{2} = \frac{(\ln 2)^2}{2}\frac{\mu_0{}^2 a^2 I_0^2}{TR} = \frac{(\ln 2)^2}{4\pi}\frac{\mu_0{}^2 a^2 I_0^2 \omega}{R}$$