Corso di Laurea in Fisica

A.A. 2017/18

Elettricita' e Magnetismo

Prova scritta – 5/4/2018

Problema 1

Un condensatore piano è costruito usando come dielettrico un materiale di costante dielettrica $\varepsilon_r = 3.00$ e di rigidità dielettrica $2.00 \times 10^8\ Vm^{-1}$. La capacità richiesta è $C = 0.25\ \mu F$ ed il condensatore deve sopportare una differenza di potenziale massima di $4\ kV$.

1. Calcolare l'area minima delle armature del condensatore
2. Calcolare l'energia immagazzinata quando è caricato a una ddp di $3\ kV$.
3. Se il condensatore carico come in 2. viene poi scaricato attraverso una resistenza $R = 10\ k\Omega$ a partire da $t = 0$, calcolare l'energia dissipata nel primo millisecondo

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d} \rightarrow A = \frac{Cd}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$V = Ed \rightarrow d = \frac{V}{E} \geq \frac{V}{E_{\max}}$$

$$\rightarrow d_{\min} = \frac{V}{E_{\max}}$$

$$\rightarrow A_{\min} = \frac{Cd_{\min}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{CV}{\varepsilon_0 \varepsilon_r E_{\max}} = \frac{0.25 10^{-6} 4 10^3}{8.86 10^{-12} 3\ 2 10^8} \approx \frac{0.75\ 10}{53.16} \approx 0.189\ m^2$$

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} 0.25 10^{-6} 9 10^6 \approx 1.12\ J$$

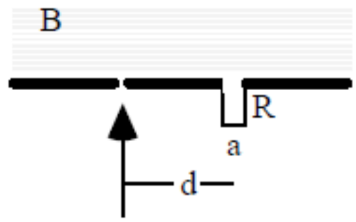
$$\tau = RC = 0.25 10^{-2}\ s = 2.5\ ms$$

$$v = Ve^{-t/\tau} \rightarrow u = \frac{1}{2} Cv^2 = \frac{1}{2} CV^2 e^{-2t/\tau}$$

$$\rightarrow \Delta E = U - u = \frac{1}{2} CV^2 \left(1 - e^{-2t/\tau}\right) \approx 1.12 \left(1 - e^{-2 10^{-3}/2.5 10^{-3}}\right) \approx 0.617\ J$$

Problema 2 – Versione distribuita in aula

Un fascio di elettroni passa attraverso una fenditura di larghezza trascurabile ed entra in una zona in cui e' presente un campo magnetico $B = 10\ T$, perpendicolare al piano della figura. Un rivelatore di elettroni di larghezza $a = 2$ cm e' centrato a distanza $d = 20\ cm$ dalla fenditura



1. Quali sono le energie minima e massima degli elettroni che entrano nel rivelatore?
2. Qual e' la risoluzione energetica del sistema, usato come misuratore di energia?

Soluzione trovata ignorando questioni relativistiche
(sbagliata, ma accettata in questo contesto)

$$m\frac{v^2}{r} = evB \rightarrow r = \frac{mv}{eB}$$

$$v = \frac{eBr}{m}$$

$$\rightarrow v_{\min} = \frac{eBr_{\min}}{m} = \frac{eB}{2m}\left(d - \frac{a}{2}\right)$$

$$\rightarrow v_{\max} = \frac{eBr_{\max}}{m} = \frac{eB}{2m}\left(d + \frac{a}{2}\right)$$

$$E_{\min} = \frac{1}{2}mv_{\min}^2 = \frac{1}{2}\frac{e^2B^2}{4m}\left(d - \frac{a}{2}\right)^2$$

$$E_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}\frac{e^2B^2}{4m}\left(d + \frac{a}{2}\right)^2$$

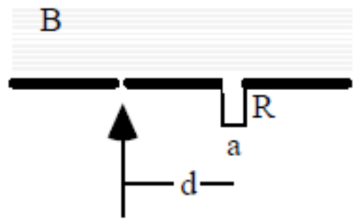
$$\overline{E} = \frac{1}{2}m\overline{v}^2 = \frac{1}{2}\frac{e^2B^2}{4m}d^2$$

$$\Delta E = E_{\max} - E_{\min} = \frac{1}{2}\frac{e^2B^2}{4m}\left[\left(d + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(d - \frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\frac{e^2B^2}{4m}(2da) = \frac{e^2B^2da}{m}$$

$$\frac{\Delta E}{\overline{E}} = \frac{\dfrac{e^2B^2da}{4m}}{\dfrac{1}{2}\dfrac{e^2B^2}{4m}d^2} = \frac{2a}{d} = 20\ \%$$

Problema 2 – Versione non richiedente considerazioni relativistiche

Un fascio di protoni passa attraverso una fenditura di larghezza trascurabile ed entra in una zona in cui e' presente un campo magnetico *B = 1 T*, perpendicolare al piano della figura. Un rivelatore di protoni di larghezza *a = 2 c*m e' centrato a distanza *d = 20 cm* dalla fenditura



3. Quali sono le energie minima e massima dei protoni che entrano nel rivelatore?
4. Qual e' la risoluzione energetica del sistema, usato come misuratore di energia?

$$m\frac{v^2}{r} = evB \rightarrow r = \frac{mv}{eB}$$

$$v = \frac{eBr}{m}$$

$$\rightarrow v_{\min} = \frac{eBr_{\min}}{m} = \frac{eB}{2m}\left(d - \frac{a}{2}\right)$$

$$\rightarrow v_{\max} = \frac{eBr_{\max}}{m} = \frac{eB}{2m}\left(d + \frac{a}{2}\right)$$

$$E_{\min} = \frac{1}{2}mv_{\min}^2 = \frac{1}{2}\frac{e^2B^2}{4m}\left(d - \frac{a}{2}\right)^2$$

$$E_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}\frac{e^2B^2}{4m}\left(d + \frac{a}{2}\right)^2$$

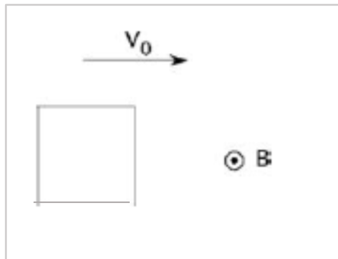
$$\overline{E} = \frac{1}{2}m\overline{v}^2 = \frac{1}{2}\frac{e^2B^2}{4m}d^2$$

$$\Delta E = E_{\max} - E_{\min} = \frac{1}{2}\frac{e^2B^2}{4m}\left[\left(d + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(d - \frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\frac{e^2B^2}{4m}(2da) = \frac{e^2B^2da}{m}$$

$$\frac{\Delta E}{\overline{E}} = \frac{\frac{e^2B^2da}{4m}}{\frac{1}{2}\frac{e^2B^2}{4m}d^2} = \frac{2a}{d} = 20\ \%$$

Problema 3

Una spira quadrata di lato $L=10\ cm$ e resistenza $R = 1\ \Omega$ viene trascinata a velocita' costante $v_0 = 0.1\ ms^{-1}$ lungo l'asse x in una zona in cui e' presente un campo magnetico $\boldsymbol{B}$, perpendicolare al piano della spira, il cui modulo varia secondo la formula $B(x)=\alpha + \beta x$, con $\beta = 0.1\ Tm^{-1}$



Determinare:

1. La corrente indotta nella spira
2. La forza necessaria a mantenere costante la velocita' della spira

$$\Phi(B) = L\int_x^{x+L} B(x)dx = L\left(\alpha x + \frac{1}{2}\beta x^2\right)_x^{x+L}$$

$$\Phi(B) = L^2\alpha + L\frac{1}{2}\beta\left[(x+L)^2 - x^2\right] = L^2\alpha + L\frac{1}{2}\beta\left(x^2 + L^2 + 2xL - x^2\right) = \alpha L^2 + \frac{1}{2}\beta L^3 + \beta x L^2$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\Phi}{dx}v_0 = \beta L^2 v_0 = -\varepsilon$$

$$\rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{\beta L^2 v_0}{R} = -10^{-4}\ A$$

$$F = iB(x+L)L - iB(x)L$$

$$\rightarrow F = iL\left[\alpha + \beta(x+L) - (\alpha + \beta x)\right] = iL\beta L \approx 10^{-7} N$$