

Elettricità e Magnetismo

Prova scritta – 15/03/2021

Telematica

Problema 1

Una sfera di raggio $R = 1 \text{ cm}$ contiene una carica elettrica $Q = 1 \text{ nC}$, distribuita non uniformemente con densità di carica $\rho(r) = \alpha r$.

Determinare:

- α e il campo elettrico $E(r)$ all'interno della sfera
- La velocità iniziale minima v di una carica puntiforme Q a grande distanza dalla sfera e diretta verso il centro perché essa attraversi tutta la sfera
- La differenza di energia elettrostatica fra questo caso e quello in cui la stessa carica Q è distribuita uniformemente sulla superficie della sfera

$$\int_{vol} \alpha r dV = Q$$

$$4\pi \int_0^R \alpha r r^2 dr = Q \rightarrow \alpha = \frac{Q}{\pi R^4}$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{vol} \alpha r dV = 4\pi \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r \alpha r r^2 dr = 4\pi \frac{1}{\varepsilon_0} \alpha \frac{r^4}{4}, r < R$$

$$\rightarrow E = 4\pi \frac{1}{\varepsilon_0} \alpha \frac{r^4}{4} \frac{1}{4\pi r^2} = \frac{Q r^2}{4\pi \varepsilon_0 R^4}, r < R$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}, r > R$$

$$V(0) = Q \int_0^R E dr + Q \int_R^\infty E dr$$

$$\rightarrow V(0) = Q \int_0^R \frac{Q r^2}{4\pi \varepsilon_0 R^4} dr + Q \int_R^\infty \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr$$

$$\rightarrow V(0) = Q \frac{Q R^3}{12\pi \varepsilon_0 R^4} + Q \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q}{R} = \frac{Q^2}{12\pi \varepsilon_0 R} + \frac{3}{12\pi \varepsilon_0} \frac{Q^2}{R} = \frac{Q^2}{3\pi \varepsilon_0 R}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{Q^2}{3\pi\epsilon_0 R} \rightarrow v > \sqrt{\frac{2Q^2}{3\pi\epsilon_0 mR}}$$

$$E_{el} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_{vol1} \left(\frac{Qr^2}{4\pi\epsilon_0 R^4} \right)^2 dV + \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_{vol2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right)^2 dV$$

$$E_{el} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0 R^4)^2} \int_{vol1} r^4 dV + \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_{vol2} \frac{1}{r^4} dV$$

$$E_{el} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0 R^4)^2} 4\pi \frac{R^7}{7} + \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 4\pi \frac{1}{R}$$

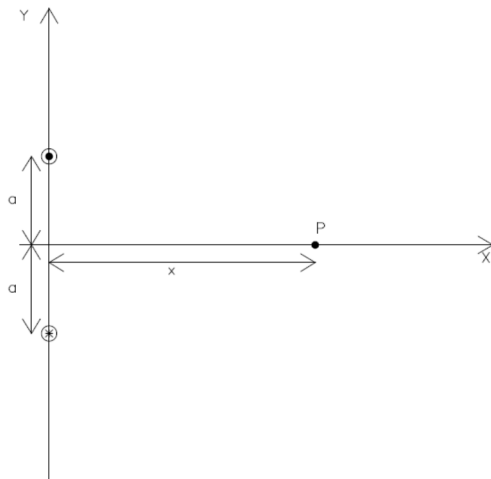
$$E_{el} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 7R} + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right) = \frac{1}{2} \frac{8Q^2}{4\pi\epsilon_0 7R} = \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 7R}, \text{ primo caso}$$

$$E_{el} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 8R}, \text{ secondo caso}$$

$$\Delta E_{el} = \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right) = \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 56R}$$

Problema 2

In una coppia di fili molto lunghi e paralleli posti a distanza $2a = 60$ cm passano correnti $I = 20$ A uguali e opposte, come mostrato in sezione nella figura.



- Calcolare il modulo del campo magnetico \mathbf{B} nei punti sull'asse x
- Calcolare il valore di x che corrisponde al valore massimo del campo B

Un terzo lungo filo parallelo agli altri due passa per il punto P alla distanza $x = 30$ cm dal punto medio fra le proiezioni degli altri due, e trasporta la stessa corrente I

- Determinare la forza per unità di lunghezza che si esercita sul terzo filo se la sua corrente entra o esce dal piano della figura.

$\mathbf{B} = B_x \hat{\mathbf{i}}$, le altre componenti sono nulle

$$B_x = 2 \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \theta = \frac{\mu_0 I a}{\pi (a^2 + x^2)}$$

$$B_x^{\max} = B_x (x = 0)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{l} \times \mathbf{B} = I \hat{\mathbf{u}}_z \times \frac{\mu_0 I a}{\pi (a^2 + x^2)} \hat{\mathbf{u}}_x = \frac{\mu_0 I^2 a}{\pi (a^2 + x^2)} \hat{\mathbf{u}}_y$$

\mathbf{F} +va se I esce dal piano, -va se I entra nel piano della figura