

Elettricità e Magnetismo

Prova scritta – 15/09/2020

Problema 1

Un condensatore di capacità $C_0 = 100 \text{ nF}$ è collegato a una fem costante $V = 150 \text{ V}$. Se lo spazio fra le armature viene riempito con un dielettrico, si misura una variazione ΔQ della carica del condensatore.

Calcolare:

1. La costante dielettrica relativa del dielettrico
2. Lavoro (positivo, negativo o nullo) compiuto dalla fem per mantenere costante la tensione V

$$V = V_{in} = \frac{Q_0}{C_0} = V_{fin} = \frac{Q_0 + \Delta Q}{C_{fin}} = \frac{Q_0 + \Delta Q}{\epsilon_r C_0}$$

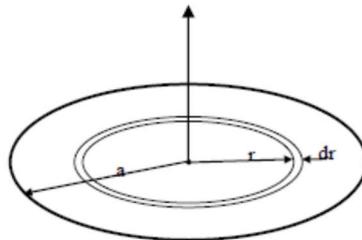
$$\rightarrow \epsilon_r = 1 + \frac{\Delta Q}{Q_0} = 1 + \frac{\Delta Q}{C_0 V} = 3$$

$$W = V \Delta Q = 4.5 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Problema 2

Sulla superficie di un disco circolare di raggio $a = 2 \text{ cm}$ è posta una carica uniforme $Q = 30 \text{ nC}$. Il disco ruota con velocità angolare costante ω attorno ad un asse z passante per il centro e perpendicolare al piano del disco.

1. Calcolare il campo magnetizzante H lungo l'asse di rotazione, in un punto generico $z \gg a$
2. Schematizzando il disco come una spira di raggio a calcolare la corrente i che fornisce lo stesso campo calcolato in 1.



$$dH = \frac{1}{2} \frac{dir^2}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \approx \frac{1}{2} \frac{dir^2}{z^3}$$

$$di = \frac{dq}{dt} = \frac{2\pi r dr \sigma}{\frac{1}{f}} = 2\pi r dr \sigma f$$

$$\sigma = \frac{Q}{\pi a^2}$$

$$\rightarrow H = \int_0^a dH = \frac{fQ}{a^2 z^3} \int_0^a r^3 dr = \frac{a^2 fQ}{4z^3} \approx 4.810^{-10} \text{ Am}^{-1}$$

$$M = iS = i\pi a^2 \rightarrow H \approx \frac{M}{2\pi z^3} = \frac{ia^2}{2z^3}$$

$$\frac{a^2 fQ}{4z^3} = \frac{ia^2}{2z^3} \rightarrow i = \frac{fQ}{2} \approx 0.3 \mu A$$

Problema 3

Le armature di un condensatore piano vengono portate a una tensione V_0 ; successivamente lo spazio fra le armature viene riempito con acqua distillata a 20 C , di resistività ρ e costante dielettrica relativa ϵ_r .

1. Supponendo che la variazione iniziale di carica sia istantanea, la pila viene poi scollegata: trovare il rapporto fra densità di corrente di conduzione e densità di corrente di spostamento
2. Se al condensatore viene applicata la tensione $V(t) = V_0 \cos \omega t$, calcolare fino a quale pulsazione ω si può trascurare la corrente di spostamento rispetto a quella di conduzione, facendo un errore inferiore all'1%
3. [Facendo ipotesi semplici sulla geometria del sistema, stimare la costante di tempo di smorzamento del circuito RC equivalente]

$$\tau = RC = \rho \frac{h}{S} \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{h} = \rho \epsilon_0 \epsilon_r = 124 \mu s$$

$$\rightarrow V(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$

$$j_c = \frac{i}{S} = \frac{V(t)}{RS} = \frac{V(t)}{\rho h}$$

$$j_s = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial E}{\partial t} = -\epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial V}{h \partial t} = -\epsilon_0 \epsilon_r V_0 \left(-\frac{1}{\tau} \right) e^{-t/\tau} = j_c$$

$$j_c = \frac{i}{S} = \frac{V(t)}{\rho h} = \frac{V_0}{\rho h} \cos \omega t \rightarrow j_c^{eff} = \frac{V_0}{\sqrt{2} \rho h}$$

$$j_s = \frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{h} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \omega}{h} V_0 \sin \omega t \rightarrow j_s^{eff} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \omega V_0}{\sqrt{2} h}$$

$$\rightarrow \frac{j_c^{eff} - j_s^{eff}}{j_c^{eff}} = \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_r - \frac{1}{\rho}}{\frac{1}{\rho}} = \omega \tau < 0.01$$

$$\rightarrow \omega < \frac{0.01}{\tau} = 80 \text{ rad s}^{-1}$$
