Corso di Laurea in Fisica

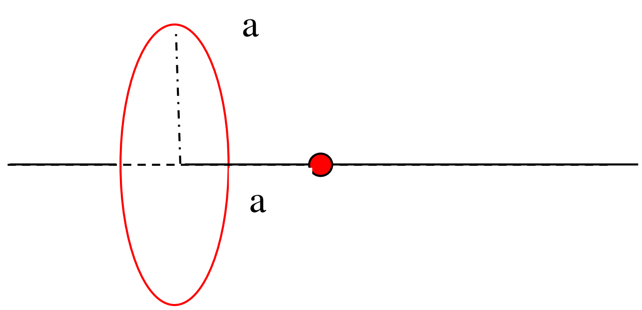
A.A. 2016/17

Elettricita' e Magnetismo

Prova scritta – 16/03/2017

<u>Problema 1</u>

Un anello di raggio $a = 50\ cm$, fissato nel piano xy a $z = 0$, e' carico positivamente con densita' lineare di carica costante $\lambda = 0.001\ Cm^{-1}$. Una carica puntiforme $q = 0.001$ C , con massa $m = 10\ g$, viene lasciata libera di muoversi da ferma lungo l'asse perpendicolare alla circonferenza, partendo da una posizione iniziale distante a dal centro dell'anello.



a) Determinare il potenziale elettrostatico nel punto in cui si trova inizialmente la carica
b) Qual e' la velocita' della carica quando si trova, sul suo asse, molto lontana dalla circonferenza ($z \rightarrow \infty$) ?

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\left(x^2+a^2\right)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda ds}{\left(x^2+a^2\right)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda a d\theta}{\left(x^2+a^2\right)^{1/2}}$$

$$\rightarrow \phi(x) = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda a d\theta}{\left(x^2+a^2\right)^{1/2}} = \frac{\lambda a}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi}{\left(x^2+a^2\right)^{1/2}} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\lambda a}{\left(x^2+a^2\right)^{1/2}}$$

$$\rightarrow \phi(a) = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\lambda a}{\left(a^2+a^2\right)^{1/2}} = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\varepsilon_0} = \frac{10^{-3}}{2.82\ 8.8510^{-12}} \approx 410^7 \quad V$$

$$E_{in} = U(a) = \frac{\lambda q}{2\sqrt{2}\varepsilon_0}$$

$$E_{fin} = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

$$E_{fin} = E_{in} \rightarrow \frac{1}{2}mv_\infty^2 = \frac{\lambda q}{2\sqrt{2}\varepsilon_0}$$

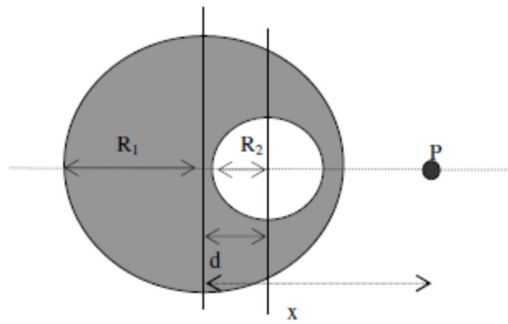
$$v_\infty^2 = \frac{\lambda q}{\sqrt{2}\varepsilon_0 m}$$

$$\rightarrow v_\infty = \sqrt{\frac{\lambda q}{\sqrt{2}\varepsilon_0 m}} \approx \sqrt{\frac{1}{8.8510^{-12}}\frac{10^{-3}10^{-3}}{\sqrt{2}10^{-2}}} = \sqrt{\frac{1}{12.5}\frac{10^{-3}}{10^{-7}}}$$

$$\rightarrow v_\infty \approx 0.28310^4\, ms^{-1}$$

Problema 2

Un filo cilindrico indefinito ha raggio $R_1 = 2\ cm$, e contiene una cavita' cilindrica parallela, indefinita ed eccentrica, di raggio $R_2 = 0.5\ cm$, il cui asse dista $d = 1\ cm$ dall'asse del filo, come in figura:



Il filo e' percorso da una corrente $i = 10\ A$, con densita' di corrente uniforme entrante nel piano del disegno. Usando il principio di sovrapposizione per ricondurre il problema alla somma di due problemi semplici:

a) Determinare il campo magnetico $\boldsymbol{B}$ in un punto P, a distanza $x = 10\ cm$ sulla retta congiungente i due centri

b) Determinare la forza cui e' soggetto un elettrone che si muove con velocita' costante $v = 10\ ms^{-1}$ lungo l'asse della cavita'

$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ sovrapposizione dei campi del filo pieno e di un filo fittizio di volume identico alla cavita',percorsi da opportune correnti in verso opposto

$i_1 + i_2 = I$ somma delle 2 correnti fittizie = corrente reale

$\mathbf{B}_1$ c. magnetico generato da filo pieno senza cavita'

$$i_1 = I\,\frac{\pi R_1^2}{\pi\left(R_1^2 - R_2^2\right)} = I\,\frac{R_1^2}{R_1^2 - R_2^2}$$

$\mathbf{B}_2$ c. magnetico generato da filo equivalente a cavita', corrente opposta

$$i_2 = -I\,\frac{\pi R_2^2}{\pi\left(R_1^2 - R_2^2\right)} = -I\,\frac{R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}$$

$$B_1(P) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\frac{R_1^2}{R_1^2 - R_2^2}$$

$$B_2(P) = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi(x-d)} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(x-d)}\frac{R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}$$

$$\rightarrow B(P) = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\left(R_1^2 - R_2^2\right)}\left(\frac{R_1^2}{x} - \frac{R_2^2}{x-d}\right) = \frac{12.56 10^{-7} 10}{6.28\left(4 10^{-4} - 0.25 10^{-4}\right)}\left(\frac{4 10^{-4}}{0.1} - \frac{0.25 10^{-4}}{0.09}\right)$$

$$\rightarrow B(P) = \frac{2 10^{-6}}{3.75 10^{-4}}\left(4 10^{-3} - 2.78 10^{-4}\right) = 0.53 10^{-3} 3.72 10^{-3} = 1.98 10^{-5} \approx 20\ \mu T$$

tangente alla circonferenza concentrica al filo 1 che passa per P

$$B_1(P')2\pi d = \mu_0 i_1' = \mu_0\,\frac{Id^2}{R_1^2 - R_2^2} \rightarrow B_1(P') = \frac{\mu_0 I d}{2\pi\left(R_1^2 - R_2^2\right)}$$

$B_2(P') = 0$ sull'asse

$$\rightarrow B(P') = B_1(P') + B_2(P') = \frac{\mu_0 I d}{2\pi\left(R_1^2 - R_2^2\right)}$$

tangente alla circonferenza concentrica al filo 1 che passa per P'

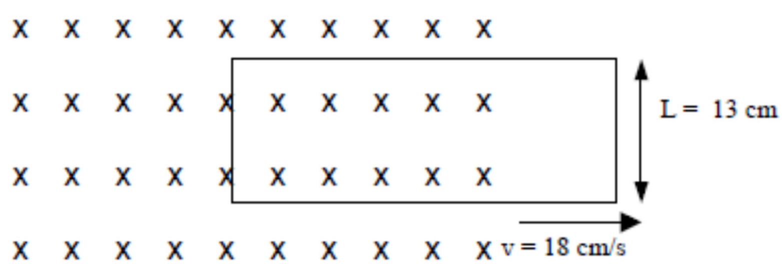
$$\rightarrow F = evB = \frac{\mu_0 I d e v}{2\pi\left(R_1^2 - R_2^2\right)} = \frac{2\ 10^{-7} 10\ 0.1\ 1.6 10^{-19}\ 10}{3.75 10^{-4}} = \frac{32 10^{-26}}{3.75 10^{-4}}$$

$$\rightarrow F = \frac{32}{3.75} 10^{-22} \approx 8.5 10^{-22}\,N,$$ direzione radiale

Problema 3

Supponendo che il circuito in figura sia una bobina rettangolare di $N = 85$ spire di filo di rame, con $R = 6.2\Omega$, immerse in un campo di induzione magnetica $B = 1.5\ T$ ortogonale (verso entrante nella pagina), calcolare, trascurando l'autoinduzione:

a) La corrente che circola nella bobina quando essa si muove con velocita' v come indicato, nell'intervallo di tempo in cui e' parzialmente immersa nel c.magnetico
b) La forza necessaria ad estrarla a velocità costante nelle condizioni descritte in a)



$$V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$\Phi = NBxL,\quad x$ tratto del lato della spira entro $\mathbf{B}$

$$\frac{d\Phi}{dt} = NBL\frac{dx}{dt} = NBLv$$

$$\rightarrow V = -NBLv$$

$$\rightarrow i = \frac{V}{R} = -\frac{NBLv}{R} = -\frac{85\ 1.5\ 0.13\ 0.18}{6.5} \approx -0.459\ A$$

$$F = NiBL = 85\ 0.459\ 1.5\ 0.13 \approx 7.61\ N$$