Corso di Laurea in Fisica

A.A. 2017/18

Elettricita' e Magnetismo

Prova scritta – 18/9/2018

<u>Problema 1</u>

Una carica positiva puntiforme $Q = 3\ 10^{-10}\ C$ è posta al centro di una sfera di raggio $R = 10\ cm$, costituita da materiale dielettrico lineare, omogeneo e isotropo di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 4$. All'esterno c'è il vuoto. Calcolare:

1. Il valore del campo elettrico E_A ed E_B a distanze dal centro $A = R/2$ e $B = 2R$, rispettivamente
2. La densità superficiale σ_p e volumica ρ_p delle cariche di polarizzazione sulla superficie della sfera.

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \rightarrow E = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}, & r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r > R \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} E_A = \dfrac{4Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^2} = \dfrac{Q}{\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^2} \approx \dfrac{3 10^{-10}}{3.14\ 8.87 10^{-12}\ 4\ 0.01} \approx 270\ Vm^{-1} \\ E_B = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 4R^2} = \dfrac{Q}{16\pi\varepsilon_0 R^2} \approx \dfrac{3 10^{-10}}{16\ 3.14\ 8.87 10^{-12}\ 0.01} \approx 67.5\ Vm^{-1} \end{cases}$$

$$\sigma_p = -\mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = P$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0\mathbf{E} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \mathbf{D}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}$$

$$P = D - \varepsilon_0 E = \frac{Q}{4\pi R^2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_r R^2} = \frac{Q}{4\pi R^2}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}$$

$$\rightarrow \sigma_p = \frac{Q}{4\pi R^2}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \approx \frac{3 10^{-10}}{4\ 3.14\ \ 0.01}\frac{3}{4} \approx 1.79\ 10^{-9}\ \ Cm^{-2}$$

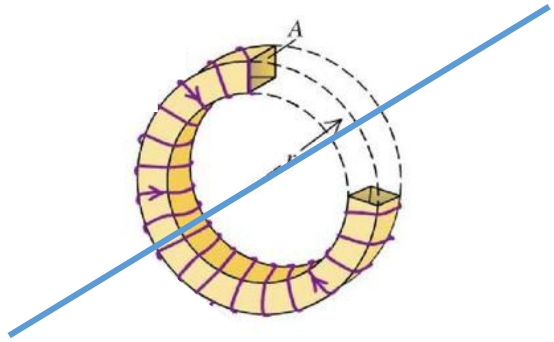
$$\rho_p = -\nabla\cdot\mathbf{P} = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\nabla\cdot\mathbf{D} = 0 \text{ alla superficie}$$

Problema 2

Un filo rettilineo indefinito e' percorso da una corrente variabile nel tempo secondo la legge:

$$i(t) = k\,t$$

Il filo e' situato sull'asse di un solenoide toroidale di N, con raggio interno a, a sezione quadrata di lato A



Calcolare:
a) La forza elettromotrice indotta nel solenoide
b) Il campo magnetico aggiuntivo presente nel solenoide dovuto alla corrente indotta, se la resistenza totale del solenoide e' R

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi(t) = N\int_A \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\Sigma = N\int_S B(t)\,d\Sigma$$

$$B(r,t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 kt}{2\pi r}$$

$$d\Sigma = A\,dr$$

$$\rightarrow \Phi(t) = N\int_a^{a+A}\frac{\mu_0 kt}{2\pi r}A\,dr = NA\frac{\mu_0 kt}{2\pi}\ln\frac{a+A}{a}$$

$$\rightarrow \varepsilon = -NA\frac{\mu_0 k}{2\pi}\ln\frac{a+A}{a}$$

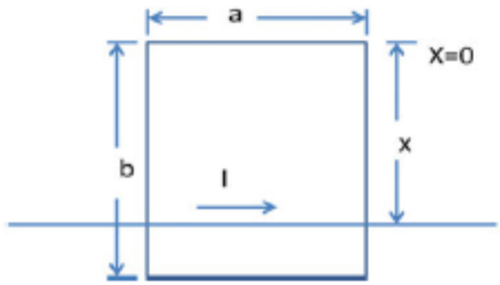
$$\oint_\Gamma \mathbf{B}_{agg}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 N i_{ind} \rightarrow B_{agg} = \frac{\mu_0 N i_{ind}}{2\pi r}$$

$$i_{ind} = -\frac{\varepsilon}{R} = -\frac{NA\frac{\mu_0 k}{2\pi}\ln\frac{a+A}{a}}{R}$$

$$\rightarrow B_{agg} = \frac{\mu_0 N i_{ind}}{2\pi r} = -\frac{\mu_0^2 N^2 A}{4\pi^2 R}\ln\frac{a+A}{a}\frac{k}{r}$$

Problema 3

Una spira rettangolare di resistenza R ha lati a e b; direttamente sopra la spira passa un filo indefinito di raggio δ che trasporta una corrente che varia nel tempo con la legge $I=I_0 sen(\omega t)$, posizionato come in figura.



Trascurando il campo interno al filo, determinare:

1. Il flusso totale di $\boldsymbol{B}$ attraverso la spira in funzione della posizione x del filo
2. Il valore di x per il quale la corrente indotta nella spira e' identicamente nulla

$$\Phi(t)=\int_S \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}d\Sigma=\int_{S_1} B_1 d\Sigma_1-\int_{S_2} B_2 d\Sigma_2$$

$$d\Sigma_1=d\Sigma_2=adr$$

$$B_1=B_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\rightarrow\int_{S_1} B_1 d\Sigma_1 = a\int_\delta^{b-x}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}dr=a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{b-x}{\delta}$$

$$\rightarrow\int_{S_2} B_2 d\Sigma_2 = a\int_\delta^{x}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}dr=a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{x}{\delta}$$

$$\rightarrow\Phi(t)=a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{b-x}{\delta}-a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{x}{\delta}=a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\ln\frac{b-x}{\delta}-\ln\frac{x}{\delta}\right)=a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{b-x}{x}$$

$$i(t)=\frac{\varepsilon(t)}{R}$$

$$\varepsilon(t)=-\frac{d\Phi}{dt}=-a\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b-x}{x}\frac{dI}{dt}=-a\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b-x}{x}\omega I_0\cos\omega t$$

$$\rightarrow i(t)=-a\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b-x}{x}\frac{\omega I_0}{R}\cos\omega t$$

$$i(t)\equiv 0\rightarrow\ln\frac{b-x}{x}=0\rightarrow\frac{b-x}{x}=1\rightarrow x=\frac{b}{2}$$