Corso di Laurea in Fisica

A.A. 2019/20

Elettricita' e Magnetismo

Prova scritta – 18/12/2019

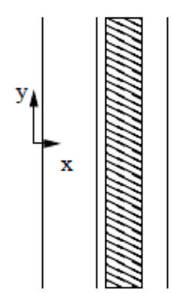
Problema 1

Tre piastre isolanti sottili quadrate hanno lato di *20 cm*. Su di esse sono depositate le cariche $Q_1 = 15\mu C$, $Q_2 = -25\mu C$, $Q_3 = 35\mu C$ rispettivamente, sono parallele tra di loro e la distanza tra la prima e la seconda è di *3 mm*, mentre tra la seconda e la terza ci sono *4 mm*. Inoltre, tra la seconda e la terza, lo spazio è riempito per metà da un dielettrico di costante relativa $\varepsilon_r = 3$ come in figura. Trascurando gli effetti di bordo (e quindi in regioni di spazio nei pressi del centro delle piastre):

1. Si calcoli l'espressione del campo elettrico e del potenziale in funzione di x ($x = 0$ al centro della prima piastra). Si assuma convenzionalmente che lo zero del potenziale sia in corrispondenza della prima piastra.

2. Si calcolino le cariche di polarizzazione relative al dielettrico

3. Se le cariche diventano $Q_1 = 15\mu C$, $Q_2 = 0\mu C$, $Q_3 = -15\mu C$, il campo elettrico nella regione di spazio esterna alle piastre, trascurati gli effetti di bordo, è nullo. Si calcoli l'energia potenziale elettrostatica del sistema ed il lavoro necessario ad estrarne il dielettrico.



$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{l^2}, \sigma_2 = \frac{Q_2}{l^2}, \sigma_3 = \frac{Q_3}{l^2}$$

$$E(x) = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}, x < 0$$

$$\rightarrow E(x) = -\frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{2\varepsilon_0 l^2}, x < 0$$

$$\rightarrow V(x) = \frac{1}{2\varepsilon_0 l^2}(Q_1 + Q_2 + Q_3)x$$

$$E(x) = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}, 0 < x < d_1$$

$$\rightarrow E(x) = \frac{Q_1 - Q_2 - Q_3}{2\varepsilon_0 l^2}, 0 < x < d_1$$

$$\rightarrow V(x) = -\left(\frac{Q_1 - Q_2 - Q_3}{2\varepsilon_0 l^2}\right)x$$

$$E(x) = \frac{1}{\varepsilon_r}\left(\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}\right), d_1 < x < d_1 + \frac{d_2}{2}$$

$$\rightarrow E(x) = \frac{Q_1 + Q_2 - Q_3}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r l^2}, d_1 < x < d_1 + \frac{d_2}{2}$$

$$\rightarrow V(x) = -\frac{Q_1 + Q_2 - Q_3}{2\varepsilon_0 l^2 \varepsilon_r}(x - d_1) - \frac{Q_1 - Q_2 - Q_3}{2\varepsilon_0 l^2} d_1$$

$$E(x) = \left(\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}\right), d_1 + \frac{d_2}{2} < x < d_1 + d_2$$

$$\rightarrow E(x) = \frac{Q_1 + Q_2 - Q_3}{2\varepsilon_0 l^2}, d_1 + \frac{d_2}{2} < x < d_1 + d_2$$

$$\rightarrow V(x) = -\frac{Q_1 + Q_2 - Q_3}{2\varepsilon_0 l^2}\left(x - d_1 - \frac{d_2}{2}\right) -$$

$$-\frac{Q_1 + Q_2 - Q_3}{2\varepsilon_0 l^2 \varepsilon_r}\frac{d_2}{2} - \frac{Q_1 - Q_2 - Q_3}{2\varepsilon_0 l^2} d_1$$

$$E(x) = \left(\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}\right), x > d_1 + d_2$$

$$\rightarrow E(x) = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{2\varepsilon_0 l^2}, x > d_1 + d_2$$

$$\rightarrow V(x) = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{2\varepsilon_0 l^2}(x - d_1 - d_2) - \frac{Q_1 + Q_2 - Q_3}{2\varepsilon_0 l^2}\frac{d_2}{2} - \frac{Q_1 + Q_2 - Q_3}{2\varepsilon_0 l^2 \varepsilon_r}\frac{d_2}{2} - \frac{Q_1 - Q_2 - Q_3}{2\varepsilon_0 l^2} d_1$$

$$D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \to P = D - \varepsilon_0 E = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E$$

$$\to P = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{Q_1 + Q_2 - Q_3}{2l^2} = -\sigma_p$$

$$\to q_p = -\frac{\varepsilon_r - 1}{2\varepsilon_r}(Q_1 + Q_2 - Q_3) \simeq -\frac{1}{3}(-4510^{-6}) = 15\mu C$$

$$E(x) = -\frac{Q_1' + Q_2' + Q_3'}{2\varepsilon_0 l^2} = 0, x < 0$$

$$E(x) = \frac{Q_1' + Q_2' + Q_3'}{2\varepsilon_0 l^2} = 0, x > d_1 + d_2$$

$$\to E(x) = -\frac{Q_1' + Q_3'}{2\varepsilon_0 l^2} = 0, x < 0$$

$$\to E(x) = \frac{Q_1' + Q_3'}{2\varepsilon_0 l^2} = 0, x > d_1 + d_2$$

$$U_E = u_{E1} V_1 + u_{E2} V_2 + u_{E3} V_3$$

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2$$

$$\to u_{E1} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Q_1' - Q_3'}{2\varepsilon_0 l^2}\right)^2 = \frac{(Q_1' - Q_3')^2}{8\varepsilon_0 l^4}$$

$$\to u_{E2} = \frac{(Q_1' - Q_3')^2}{8\varepsilon_r \varepsilon_0 l^4}$$

$$\to u_{E3} = \frac{(Q_1' - Q_3')^2}{8\varepsilon_0 l^4}$$

$$\to U_E = \frac{(Q_1' - Q_3')^2}{8\varepsilon_0 l^4} l^2 d_1 + \frac{(Q_1' - Q_3')^2}{8\varepsilon_r \varepsilon_0 l^4} l^2 \frac{d_2}{2} + \frac{(Q_1' - Q_3')^2}{8\varepsilon_0 l^4} l^2 \frac{d_2}{2}$$

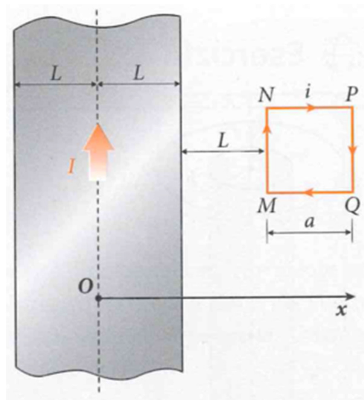
$$\to U_E = \frac{(Q_1' - Q_3')^2}{8\varepsilon_0 l^2}\left[d_1 + \frac{d_2}{2\varepsilon_r} + \frac{d_2}{2}\right]$$

$$W = U_E^{fin} - U_E^{in} = \frac{(Q_1' - Q_3')^2}{8\varepsilon_0 l^2}\left[d_1 + \frac{d_2}{2} + \frac{d_2}{2}\right] - \frac{(Q_1' - Q_3')^2}{8\varepsilon_0 l^2}\left[d_1 + \frac{d_2}{2\varepsilon_r} + \frac{d_2}{2}\right]$$

$$\to W = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{(Q_1' - Q_3')^2 d_2}{16\varepsilon_0 l^2} = \frac{2}{3} \frac{(3010^{-6})^2 \, 410^{-3}}{16 \; 8.8510^{-12} 410^{-2}} = \frac{2}{3} \frac{90010^{-1}}{16 \; 8.85} \simeq 0.424 \; J$$

Problema 2

Nel vuoto, un nastro conduttore rettilineo molto lungo, di spessore trascurabile e larghezza $2L$, è percorso da una corrente stazionaria I uniformemente distribuita sulla sua sezione. Nel piano del nastro è posta una spira rigida conduttrice quadrata di lato a, avente due lati paralleli all'asse del nastro, il più vicino dei quali è a distanza L dal bordo destro del nastro. Il circuito quadrato è percorso da corrente stazionaria i.



1. Ricavare l'espressione del campo magnetico generato dal nastro conduttore a distanza x dal suo asse.

2. Determinare la forza complessiva esercitata dal nastro sulla spira.

3. Calcolare la f.e.m. che si induce nella spira allontanandola con velocità costante v dal nastro, in funzione di v e della distanza x tra l'asse del nastro e il lato sinistro della spira.

$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi(x-z)}$, contributo da striscia infinitesima a distanza z da asse

$dI = \frac{I}{2L}dz \rightarrow B = \int_{-L}^{+L} \frac{\mu_0 I}{2\pi 2L(x-z)}dz$

$\rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi L}\int_{-L}^{+L}\frac{dz}{x-z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi L}\left[-\ln(x-z)\right]_{-L}^{+L} = \frac{\mu_0 I}{4\pi L}\ln\frac{x+L}{x-L}$, entrante nel foglio

$d\mathbf{F} = id\mathbf{l}\times\mathbf{B}$

$\rightarrow$ Forze sui lati orizzontali della spira: uguali e opposta $\rightarrow F_{(or)}^{tot} = 0$

$\rightarrow$ Forze sui lati verticali della spira: diverse

$F_{(vert)}^{1} = -B(2L)ia = -\frac{\mu_0 Iia}{4\pi L}\ln\frac{2L+L}{2L-L} = -\frac{\mu_0 Iia}{4\pi L}\ln 3$

$F_{(vert)}^{2} = B(2L+a)ia = +\frac{\mu_0 Iia}{4\pi L}\ln\frac{2L+a+L}{2L+a-L} = +\frac{\mu_0 Iia}{4\pi L}\ln\frac{3L+a}{L+a}$

$\rightarrow F_{(vert)}^{tot} = \frac{\mu_0 Iia}{4\pi L}\ln\frac{3L+a}{3(L+a)}$, attrattiva

$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx}v$

$d\Phi = Bady = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi L}\ln\frac{x+L+y}{x-L+y}dy$

$\rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi L}\int_0^a \ln\frac{x+L+y}{x-L+y}dy$

$\int \ln(x+L+y)dy = ?$

$z = x+L+y \rightarrow dz = dy$

$\int \ln z dz = z\ln z - z$

$\rightarrow \int \ln(x+L+y)dy = (x+L+y)\left[\ln(x+L+y)-1\right]$

$\rightarrow \int_0^a \ln(x+L+y)dy = \left\{(x+L+y)\left[\ln(x+L+y)-1\right]\right\}_0^a =$

$= (x+L+a)\left[\ln(x+L+a)-1\right] - (x+L)\left[\ln(x+L)-1\right]$

$\rightarrow \int_x^{x+a} \ln(x-L+y)dy = \left\{(x-L+a)\left[\ln(x-L+a)-1\right]\right\}_0^a =$

$= (x-L+a)\left[\ln(x-L+a)-1\right] - (x-L)\left[\ln(x-L)-1\right]$

$$\rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 I a}{4\pi L}\int_0^a \ln\frac{x+L+y}{x-L+y}dy =$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{4\pi L}\Big\{(x+L+a)\big[\ln(x+L+a)-1\big]-(x+L)\big[\ln(x+L)-1\big]-$$

$$-(x-L+a)\big[\ln(x-L+a)-1\big]+(x-L)\big[\ln(x-L)-1\big]\Big\}$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi L}\Big\{\big[\ln(x+L+a)\big]-\big[\ln(x+L)\big]+\big[\ln(x-L)\big]-\big[\ln(x-L+a)\big]\Big\}$$

$$\rightarrow \frac{d\Phi}{dx} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi L}\left[\ln\frac{x+L+a}{x+L}+\ln\frac{x-L}{x-L+a}\right] = \frac{\mu_0 I a}{2\pi L}\ln\frac{x-L}{x+L}\frac{x+L+a}{x-L+a}$$

$$\rightarrow \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dx}v = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi L}\ln\left(\frac{1+\dfrac{a}{x+L}}{1+\dfrac{a}{x-L}}\right)v = \frac{\mu_0 I a}{2\pi L}\ln\left(\frac{1+\dfrac{a}{x-L}}{1+\dfrac{a}{x+L}}\right)v$$

Problema 3

In un solenoide cilindrico molto lungo, di raggio *a = 5 cm*, e avvolto con *n = 20 spire/cm*, circola una corrente sinusoidale *i(t) = I sin(ωt),* con *I = 10 A*, *ω = 100 rad/s.*

1. Calcolare il campo magnetico generato dal solenoide.
2. Calcolare il campo elettrico all'interno e all'esterno del solenoide
3. Calcolare il valore massimo del campo elettrico a distanza *r = 2 cm* dall'asse del solenoide.

$$B = \mu_0 n i = \mu_0 n I \sin \omega t = 1.26 10^{-6} 2 10^{3} 10 \sin 100t \simeq 2.52 10^{-2} \sin 100t,$$

uniforme dentro il solenoide

$B = 0,$ fuori del solenoide

$$E 2\pi r = -\pi r^2 \mu_0 n I \frac{d}{dt} \sin \omega t = -\pi r^2 \mu_0 n I \omega \cos \omega t$$

$$\rightarrow E = -\frac{1}{2} r \mu_0 n I \omega \cos \omega t \simeq -1.26 r \cos 100t, \text{ all'interno del solenoide}$$

$$\rightarrow E = -\frac{a^2}{2r} \mu_0 n I \omega \cos \omega t \simeq -\frac{3.15 10^{-3}}{r} \cos 100t, \text{ all'esterno del solenoide}$$

$$E_{\max}\left(r = 2cm\right) = \frac{1}{2}\left(r = 2cm\right) \mu_0 n I \omega = 10^{-2} 1.26 10^{-6} 2 10^{3}\ 10\ 10^{2} \simeq 2.52 10^{-2} V m^{-1}$$