Corso di Laurea in Fisica

A.A. 2018/19

Elettricita' e Magnetismo

Prova scritta – 19/12/2018

<u>Problema 1</u>

Un lungo condensatore cilindrico, con il conduttore interno di raggio $a = 1\ cm$ ed esterno di raggio $b = 2\ cm$, contiene un dielettrico la cui costante dielettrica relativa dipende da *r,* distanza dall'asse dei cilindri: $\varepsilon_r = \varepsilon_r(r)$. La differenza di potenziale tra le armature del condensatore e' $V = 20V$, mentre la densita' di energia elettrostatica risulta essere indipendente da *r* e uguale a $u_E = 2.65\ 10^{-3}\ Jm^{-3}$. Calcolare:

1. La funzione $\varepsilon_r(r)$
2. Il campo elettrico nel condensatore nelle condizioni trovate in 1.

Sup. gaussiana: Cilindro raggio r, lunghezza l

$$\oint_\Sigma \mathbf{D}\cdot\hat{\mathbf{n}}d\Sigma = q \rightarrow D2\pi rl = q \rightarrow D = \frac{q}{2\pi rl} = \frac{\lambda}{2\pi r},\ \lambda = \frac{q}{l}$$

$$\rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon_o\varepsilon_r(r)} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o\varepsilon_r(r)r}$$

$$\rightarrow u_E = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_o\varepsilon_r(r)r^2}$$

$$\rightarrow \varepsilon_r(r) = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_o u_E r^2}$$

$$\rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o\varepsilon_r(r)r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\dfrac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_o u_E r^2}} = \frac{4\pi u_E r}{\lambda}$$

$$\rightarrow V = \int_\Gamma \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \frac{4\pi u_E r}{\lambda}dr = \frac{4\pi u_E}{\lambda}\frac{1}{2}r^2\Big|_a^b = \frac{2\pi u_E}{\lambda}\left(b^2-a^2\right)$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{2\pi u_E\left(b^2-a^2\right)}{V}$$

$$\rightarrow \varepsilon_r(r) = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_o u_E r^2} = \frac{\left[2\pi u_E\left(b^2-a^2\right)\right]^2}{8\pi^2\varepsilon_o u_E r^2 V^2} = \frac{u_E\left[\left(b^2-a^2\right)\right]^2}{2\varepsilon_o V^2 r^2} \approx \frac{3.36\ 10^{-2}}{r^2}$$

$$\rightarrow E = \frac{4\pi u_E r}{\lambda} = \frac{2Vr}{\left(b^2-a^2\right)} \approx \frac{40r}{3 10^{-4}} \approx 1.33 10^5 r\ Vm^{-1}$$

Problema 2

Un solenoide rettilineo indefinito è avvolto con densita'di spire $n = 10^3$ *spire* m^{-1}. Al suo interno un elettrone, inizialmente in prossimità della parete del solenoide, si muove sotto l'influenza della forza di Lorentz, con velocità $v = 10^7\ ms^{-1}$ tangente alla parete stessa e perpendicolare all'asse del solenoide. Sapendo che il solenoide ha un raggio di *5 cm*, determinare:

1. La minima intensità di corrente che deve passare nel solenoide affinché l'elettrone non urti le sue pareti. [Massa dell'elettrone $m_e = 9.1 \times IO^{-31}\ kg$]
2. Il periodo del moto dell'elettrone nelle condizioni trovate in 1.

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\rightarrow F = evB$$

$$B = \mu_0 ni \rightarrow F = ev\mu_0 ni$$

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

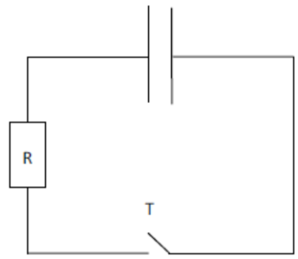
$$\rightarrow ev\mu_0 ni = m\frac{v^2}{r}$$

$$\rightarrow i = \frac{m}{e\mu_0 n}\frac{v}{r} \geq \frac{m}{e\mu_0 n}\frac{v}{R} \approx \frac{9.1 10^{-31}}{1.6 10^{-19} 1.26 10^{-6} 10^3}\frac{10^7}{5 10^{-2}} \simeq 0.903\ A$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v} = \frac{31.4 10^{-2}}{10^7} \simeq 31.4\ ns$$

<u>Problema 3</u>

Nel circuito di figura il condensatore di capacita' C = 10μF ha armature circolari di raggio $r_0 = 3cm$ separate dalla distanza d, e la resistenza e' $R = 10k\Omega$. A $t = 0$, con $Q = 1\ nC$ carica presente sulle armature del condensatore, viene chiuso l'interruttore.



Determinare:
1. Il campo elettrico e il campo magnetico fra le armature del condensatore per $t>0$.
2. La densità di energia elettromagnetica totale nel condensatore per $t>0$

$$V(t) = \frac{Q}{C}e^{-\frac{t}{\tau}},\ \ t>0,\ \ \tau = RC$$

$$\rightarrow E(t) = \frac{V(t)}{d},\ \ t>0 \rightarrow E(t) = \frac{Q}{Cd}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 r_0^2}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Flusso di **E** attraverso una circonferenza Γ concentrica di raggio r:

$$\Phi_\Gamma(\mathbf{E}) = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 r_0^2}e^{-\frac{t}{\tau}}\pi r^2 = \frac{Qr^2}{\varepsilon_0 r_0^2}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{Qr^2}{\varepsilon_0 r_0^2\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Da IV eq. di Maxwell:

$$\oint_\Gamma \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 Qr^2}{r_0^2\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 2\pi rB = -\frac{\mu_0 Qr^2}{r_0^2\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\rightarrow B(r,t) = -\frac{\mu_0 Qr}{2\pi r_0^2\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{\mu_0 r}{2\tau}E(r,t)$$

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_0\left(\frac{Q}{\pi\varepsilon_0 r_0^2}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 + \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\mu_0 Qr}{2\pi r_0^2\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2\right]$$

$$\rightarrow u = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{\pi r_0^2}\right)^2 + \mu_0\left(\frac{Q}{\pi r_0^2}\right)^2\frac{r^2}{4\tau^2}\right]e^{-\frac{2t}{\tau}} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left[\left(\frac{Q}{\pi r_0^2}\right)^2 + \mu_0\varepsilon_0\left(\frac{Q}{\pi r_0^2}\right)^2\frac{r^2}{4\tau^2}\right]e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

$$\rightarrow u = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{\pi r_0^2}\right)^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}\left(1 + \frac{r^2}{4c^2\tau^2}\right)$$